

$F \frac{14}{48}$

$\frac{801-18}{994}$

ПРОГРАММА И КОНСПЕКТЪ

НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ,

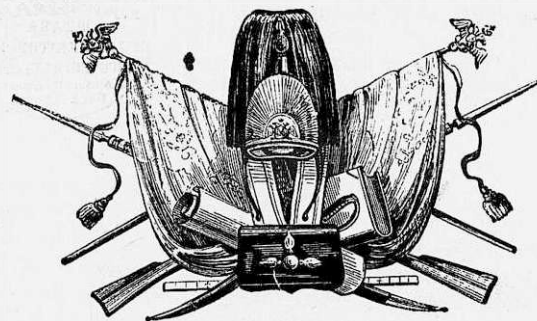
ДЛЯ РУКОВОДСТВА

ВЪ ВОЕННО-УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЯХЪ,

СОСТАВЛЕНЫ

Академикомъ Буняковскимъ,

НА ОСНОВАНІИ НАСТАВЛЕНІЯ ДЛЯ ОБРАЗОВАНІЯ ВОСПИТАННИКОВЪ
ВОЕННО-УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ, ВЫСОЧАЙШЕ УТВЕРЖДЕННАГО 24
ДЕКАБРЯ 1848 ГОДА.



САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

ВЪ ТИПОГРАФИИ ВОЕННО-УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

1851.

Утверждено ЕГО ИМПЕРАТОРСКИМЪ ВЫСОЧЕСТВОМЪ НАСЛѢДНИКОМЪ ЦЕСАРЕВИЧЕМЪ Главнымъ Начальникомъ Военно-Учебныхъ Заведеній.

Начальникъ Штаба Генералъ-Адъютантъ Ростовцовъ.

4-го Мая, 1854 года.



13159-0



2013041622

О Г Л А В Л Е Н І Е.

	Стр.
Программа Начальной Геометрии II-го класса	1.
Программа Начальной Геометрии III-го класса	3.
Программа Начальной Геометрии IV-го класса	13.

КОНСПЕКТЪ НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Общая замѣчанія.	23.
--------------------------	-----

1-й годъ.

Введеніе	47.
--------------------	-----

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

I. Объ углахъ и линияхъ перпендикулярныхъ, наклонныхъ и параллельныхъ	54.
Примѣчаніе къ теоріи параллельныхъ линий.	66.
II. Прямолинейныя фигуры и измѣреніе прямыхъ линий	71.

2-й годъ.

III. О круговой линіи. Измѣреніе угловъ.	83.
IV. Задачи, относящіяся къ предыдущимъ Отдѣламъ	88.
V. Пропорціональныя линіи и подобныя прямолинейныя фигуры	89.
VI. Задачи, относящіяся къ предыдущему Отдѣлу	100.
VII. Измѣреніе и сравненіе площадей многоугольниковъ и круга	103.
VIII. Задачи, относящіяся къ вычисленію площадей	112.

3-й годъ.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

IX. Прямыя линіи и плоскости, разсматриваемыя въ пространствѣ.	113.
--	------



X. О многогранных углахъ и о многогранникахъ	123.
Выводъ объёма многогранной призмы, основанный на способъ безконечно-малыхъ величинъ	132.
Выводъ объёма пирамиды, основанный на способъ безконечно- малыхъ величинъ	137.
XI. О круглыхъ тѣлахъ.	141.

Утверждено ЕГО ИМПЕРАТОРСКИМЪ
ВЫСОЧЕСТВОМЪ НАСЛѢДНИКОМЪ ЦЕ-
САРЕВИЧЕМЪ Главнымъ Начальникомъ.

Начальникъ Штаба Генералъ-Адъютантъ Ростовцовъ.

4 Мая, 1831 г.

ПРОГРАММА НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

Составлена на основаніи Наставленія для образованія воспи-
танниковъ Военно-Учебныхъ Заведеній, Высочайше утверж-
деннаго 24-го Декабря 1848 года.

II-ГО КЛАССА ОБЩАГО КУРСА.

(ОДНА ЛЕКЦІЯ ВЪ НЕДѢЛЮ).

Начать по прошествіи первыхъ двухъ мѣсяцевъ
учебнаго года.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Пространство ограниченное и безпредѣльное.
Три рода протяженій : объёмы, поверхности и линіи;
точка. Измѣренія, приписываемыя каждому роду про-
тяженій. Предметъ Геометріи и ея раздѣленіе. Основ-
ныя опредѣленія и аксіомы относительно прямой ли-
ніи и плоскости.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

ОТДѢЛЪ I.

Объ углахъ и линіяхъ перпендикулярныхъ, наклонныхъ и параллельныхъ.

2. Уголъ; углы большіе, меньшіе и равные; углы прямые, острые и тупые. Линіи перпендикулярныя и наклонныя. Изъ точки, взятой на прямой, можно возставить къ ней только одинъ перпендикуляръ. Прямые углы равны между собою. Сумма смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ. Равенство противоположныхъ угловъ.

3. Изъ всякой точки, взятой внѣ прямой, можно опустить на нее перпендикуляръ, и при томъ только одинъ. Наклонная линія длиннѣе перпендикуляра, и составляетъ острые углы съ обоими перпендикулярами. Наклонныя, проведенныя изъ одной точки перпендикуляра, и равно удаленныя отъ него, равны между собою, и составляютъ съ перпендикуляромъ равные углы. Изъ двухъ наклонныхъ, проведенныхъ чрезъ одну точку перпендикуляра, та длиннѣе, которая болѣе удалена отъ него, и составляетъ меньшій уголъ съ другимъ перпендикуляромъ.

4. Два перпендикуляра къ одной и той же прямой никогда не пересѣкаются. Двѣ прямыя, составляющія съ третью, по одну ея сторону, внутренніе углы,

которыхъ сумма равна двумъ прямымъ, нигдѣ не встрѣчаются. Линіи параллельныя. Наклонная и перпендикуляръ къ одной и той же прямой всегда пересѣкаются. Чрезъ данную точку можно провести только одну линію, параллельную данной прямой. Двѣ прямыя, составляющія съ третью, по одну ея сторону, внутренніе углы, которыхъ сумма не равна двумъ прямымъ, непременно пересѣкутся. Названія и свойства угловъ, происходящихъ отъ пересѣченія прямою двухъ параллельныхъ линій.

5. Линіи, параллельныя одной прямой, параллельны между собою. Два угла, имѣющіе стороны взаимно параллельныя или перпендикулярныя, будутъ или равны между собой, или, взятые вмѣстѣ, составятъ два прямые угла. Части двухъ параллельныхъ линій, заключающіяся между двумя другими параллельными, равны между собою.

ОТДѢЛЪ II.

Прямолинейныя фигуры и измѣреніе прямыхъ линій.

6. Треугольникъ; его элементы или части. Раздѣленіе треугольниковъ по ихъ сторонамъ. Сумма разстояній точки, взятой внутри треугольника, отъ концовъ одной изъ его сторонъ, меньше суммы двухъ остальныхъ боковъ. Сумма угловъ треугольника. Раз-

дѣленіе треугольниковъ по ихъ угламъ. Бѣльшей стороны треугольника противолежитъ и бѣльшій уголъ, и на оборотъ. Части совершенно опредѣляющія треугольникъ.

7. Многоугольники; ихъ раздѣленіе по числу сторонъ или угловъ. Многоугольники съ углами исходящими и входящими. Діагонали. Предложенія о суммѣ внутреннихъ и внѣшнихъ угловъ многоугольника. Четыреугольники вообще. Трапеція, параллелограмъ, ромбъ, прямоугольникъ и квадратъ. Свойства сторонъ, угловъ и діагоналей въ параллелограмѣ; частности, относящіяся къ ромбу, прямоугольнику и квадрату.

8. Измѣреніе прямой линіи. Найти общую мѣру и взаимное отношеніе двухъ прямыхъ. Прямые несоизмѣримыя.

Предсѣдатель: Главный Наблюдатель Остроградскій.

Члены: Дѣйств. Статскій Сов. Кушакевичъ.

Полковникъ Павловскій.

Профессоръ Савичъ.

Капитанъ Совко 1.

Членъ и Редакторъ Академикъ Буняковскій.

Утверждено ЕГО ИМПЕРАТОРСКИМЪ
ВЫСОЧЕСТВОМЪ НАСЛѢДНИКОМЪ ЦЕ-
САРЕВИЧЕМЪ Главнымъ Начальникомъ.

Начальникъ Штаба Генералъ-Адъютантъ Ростовцовъ.

4 Мая, 1851 г.

ПРОГРАММА НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Составлена на основаніи Наставленія для образованія воспитанниковъ Военно-Учебныхъ Заведеній, Высочайше утвержденнаго 24-го Декабря 1848 года.

III-го КЛАССА ОБЩАГО КУРСА.

(ТРИ ЛЕКЦІИ ВЪ НЕДѢЛЮ.)

Въ началѣ курса повторить первые два отдѣла
Геометріи.

ОТДѢЛЪ III.

Круговая линія. Измѣреніе угловъ.

1. Кругъ; радіусъ, діаметръ, дуга, хорда, секторъ и сегментъ. Равнымъ дугамъ соотвѣтствуютъ равныя хорды, и на оборотъ: равнымъ хордамъ принадлежатъ равныя дуги. Бѣльшимъ дугамъ соотвѣтствуютъ бѣльшія хорды, и обратно. Діаметръ есть наибольшая хорда, и обратно.

шая хорда, и раздѣляетъ кругъ пополамъ. Меньшія хорды отстоятъ далѣе чѣмъ большія отъ центра круга, и на оборотъ.

2. Перпендикуляръ, опущенный изъ центра круга на хорду, раздѣляетъ и её, и соотвѣтствующую ей дугу пополамъ. Три точки, не лежащія на одной прямой, совершенно опредѣляютъ окружность.

3. Прямая и окружность не могутъ имѣть болѣе двухъ общихъ точекъ. Касательная къ кругу. Перпендикуляръ, возставленный изъ конца радіуса, есть касательная къ кругу. Дуги, заключающіяся между параллельными линіями, равны между собой, и обратно : двѣ линіи взаимно параллельны, когда отсѣкаютъ равныя дуги на одной и той же окружности.

4. Двѣ окружности могутъ пересѣкаться только въ двухъ точкахъ. Прямая, соединяющая центры двухъ пересѣкающихся окружностей, перпендикулярна къ общей ихъ хордѣ, и раздѣляетъ её пополамъ. Прямая, соединяющая центры двухъ взаимно касательныхъ круговъ, проходитъ чрезъ точку касанія. Условія, относящіяся къ разстоянію центровъ двухъ касательныхъ окружностей. Условія, при которыхъ два круга пересѣкаются. Обратныя предложенія.

5. Уголъ пропорціоналенъ дугѣ, описанной изъ его вершины, и заключающейся между его сторонами.

Измѣреніе угловъ. Общепринятое и десятичное дѣленіе прямого угла.

6. Мѣра угла, котораго стороны встрѣчаютъ окружность.

ОТДѢЛЪ IV.

Задачи, относящіяся къ предыдущимъ Отдѣламъ ().*

7. Провести перпендикуляръ и параллельную линію къ данной прямой.

8. Раздѣлить данную прямую и данный уголъ на двѣ, на четыре, на восемь, на шестнадцать и проч. равныхъ частей.

9. Построить уголъ равный данному. Построить треугольникъ по данной сторонѣ и двумъ другимъ изъ остальныхъ пяти частей.

10. Провести касательную къ кругу: 1° изъ данной точки; 2° параллельно данной прямой; 3° подъ даннымъ угломъ къ этой прямой.

11. Описать кругъ около треугольника. Условіе, при которомъ кругъ можетъ быть описанъ около четырехъ угольника. Вписать кругъ въ треугольникъ. По данной окружности или дугѣ, найти ея центръ.

(*) Приступая къ IV Отдѣлу, Преподаватель объяснитъ употребленіе линейки, циркуля, транспортира и чертежнаго треугольника.

12. Описать кругъ, проходящій чрезъ данныя двѣ точки, и касающійся данной прямой.

13. На данной прямой начертить сегментъ, вмѣщающій данный уголъ.

ОТДѢЛЪ V.

Пропорціональныя линіи и подобныя прямолинейныя фигуры.

14. Когда двѣ прямыя пересѣчены параллельными линіями, отрѣзывающими равныя части на одной изъ нихъ, то отрѣзки на другой будутъ также равны между собой. Прямая, проведенная въ треугольникѣ параллельно одной изъ его сторонъ, раздѣляетъ двѣ другія стороны на части пропорціональныя. Параллельныя прямыя отсѣкаютъ отъ двухъ какихъ ни есть прямыхъ линій пропорціональныя части. Обратныя предложенія.

15. Подобные треугольники. Треугольники подобны: 1° когда имѣютъ равныя углы или пропорціональныя стороны; 2° когда имѣютъ уголъ равный, заключающійся между двумя сторонами пропорціональными; 3° когда стороны одного соответственно параллельны или перпендикулярны сторонамъ другого. Зависимость между сторонами пря-

моугольнаго треугольника, перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ вершины прямого угла на гипотенузу и отрѣзками гипотенузы. *Пифагорова теорема.*

16. Подобіе многоугольниковъ. Многоугольники, составленные изъ одинаковаго числа треугольниковъ, подобныхъ и одинаково расположенныхъ, подобны между собой, и обратно. Сходственные линіи въ подобныхъ многоугольникахъ пропорціональны между собой. Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся между собой, какъ сходственные стороны или другія сходственные линіи въ этихъ самыхъ многоугольникахъ.

17. Правильные многоугольники; ихъ подобіе. Центръ многоугольника, апотема, углы при центрѣ. Около правильнаго многоугольника всегда можно описать и вписать въ него кругъ. Обратное предложеніе. Периметры правильныхъ многоугольниковъ одинаковаго числа сторонъ, пропорціональны радіусамъ вписанныхъ и описанныхъ окружностей.

18. Отрѣзки двухъ хордъ, пересѣкающихся въ кругѣ, обратно пропорціональны. Перпендикуляръ, возставленный изъ какой ни есть точки діаметра, и продолженный до встрѣчи съ окружностію, есть средняя пропорціональная линія между отрѣзками діаметра. Свойства двухъ линій пересѣкающихъ кругъ,

или одной сѣкущей, а другой касательной, проведенныхъ изъ виѣшней точки.

19. Понятіе о бесконечно-малыхъ величинахъ. Кривую линію можно разсматривать какъ многоугольникъ, состоящій изъ безчисленнаго множества неизмѣримо-малыхъ прямолинейныхъ сторонъ. Окружности круговъ пропорціональны ихъ радіусамъ.

ОТДѢЛЪ VI.

Задачи, относящіяся къ предыдущему Отдѣлу.

20. Построить четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ линіямъ. Раздѣлить данную прямую на нѣсколько равныхъ частей, и вообще на нѣсколько частей, находящихся между собой въ данномъ отношеніи. Раздѣлить данную прямую на части, пропорціональныя частямъ другой прямой. Построеніе и употребленіе масштабовъ.

21. На данной прямой построить многоугольникъ, подобный данному.

22. Построить среднюю пропорціональную между двумя данными прямыми. Черезъ данныя двѣ точки провести кругъ касательный къ данной прямой.

23. Раздѣлить данную линію въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

24. Провести общія касательныя къ двумъ даннымъ кругамъ.

25. По данному вписанному въ кругъ правильному многоугольнику, построить правильный многоугольникъ, съ тѣмъ же числомъ сторонъ, описанный около круга, и на оборотъ: имѣя послѣдній, построить первый. По данному радіусу и сторонѣ вписаннаго въ кругъ правильного многоугольника, вычислить сторону многоугольника описаннаго, съ тѣмъ же числомъ сторонъ. По данному радіусу круга и сторонѣ вписаннаго правильного многоугольника, найти сторону вписаннаго же правильного многоугольника, но съ двойнымъ числомъ сторонъ.

26. Построить правильные многоугольники о четырехъ, восьми, шестнадцати и проч., о трехъ, шести, двѣнадцати и проч., о пяти, десяти, двадцати, пятинадцати, тридцати и проч. сторонахъ.

27. Показать возможность опредѣленія приближеннаго отношенія окружности къ діаметру. Приближенные выраженія этого отношенія. Вычисленіе длины окружности, или какой ни есть ея части, по данному радіусу, и обратно: опредѣленіе радіуса по данной окружности.

ОТДѢЛЪ VII.

Измѣреніе и сравненіе площадей многоугольниковъ и круга.

28. Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся между собой какъ ихъ высоты. Площади двухъ прямоугольниковъ при какихъ ни есть основаніяхъ и высотахъ, относятся между собой какъ произведенія ихъ основаній на высоты. Единичная площадь. Площадь прямоугольника равна произведенію изъ его основанія на высоту.

29. Равенство параллелограмовъ при равныхъ основаніяхъ и высотахъ. Площадь треугольника. Опредѣленіе площади какого ни есть многоугольника. Площадь трапеціи.

30. Площади правильныхъ многоугольниковъ, круга, сектора и сегмента.

31. Площади многоугольниковъ подобныхъ и круговъ относятся между собой какъ квадраты сходственныхъ въ нихъ линій. Слѣдствія этого предложенія, относящіяся до площадей правильныхъ многоугольниковъ и круговъ. Площадь какой ни есть фигуры, построенной на гипотенузѣ, равна суммѣ площадей подобныхъ ей фигуръ, построенныхъ на катетахъ.

32. Выраженіе квадрата, построеннаго на сторонѣ треугольника, лежащей противъ острого и тупаго угла.

ОТДѢЛЪ VIII.

Задачи, относящіяся къ вычисленію площадей.

33. Данный многоугольникъ обратить къ другой, равномѣрный съ нимъ, и имѣющій мѣньшее число сторонъ. Обратить многоугольникъ въ равномѣрный съ нимъ квадратъ. Найти площадь многоугольника помощію масштаба.

34. Найти, съ требуемою точностію, радіусъ круга, имѣющаго данную площадь. Найти радіусъ круга, котораго площадь равна суммѣ или разности площадей двухъ данныхъ круговъ.

35. Найти по приближенію площадь криволинейной фигуры.

Предсѣдатель: Главный Наблюдатель Остроградскій.

Члены: Дѣйств. Статскій Сов. Кушакевичъ.

Полковникъ Павловскій.

Профессоръ Савичъ.

Капитанъ Совко 1.

Членъ и Редакторъ: Академикъ Буняковскій.

Утверждено ЕГО ИМПЕРАТОРСКИМЪ
ВЫСОЧЕСТВОМЪ НАСЛѢДНИКОМЪ ЦЕ-
САРЕВИЧЕМЪ Главнымъ Начальникомъ.

Начальникъ Штаба Генералъ-Адъютантъ Ростовцовъ.

4 Мая, 1851 г.

ПРОГРАММА НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ.

Составлена на основаніи Наставленія для образованія воспитанниковъ Военно-Учебныхъ Заведеній, Высочайше утвержденнаго 24-го Декабря, 1848 года.

IV-го КЛАССА ОБЩАГО КУРСА.

(ДВѢ ЛЕКЦІИ ВЪ НЕДѢЛЮ, ВЪ ТЕЧЕНІИ ПЕРВАГО ПОЛУГОДІЯ.)

ВЪ НАЧАЛѢ КУРСА СДѢЛАТЬ КРАТКОЕ ОБОЗРѢНІЕ ПРОЙ-
ДЕННАГО ВЪ ПЕРВЫЕ ДВА ГОДА.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

ОТДѢЛЪ IX.

*Прямая линія и плоскости, рассматриваемыя въ про-
странствѣ.*

1. Опредѣленіе плоскости. Прямая, имѣющая двѣ точки общія съ плоскостію, вся лежитъ въ этой плоскости. Условія, опредѣляющія положеніе плоскости.

Взаимное пересѣченіе двухъ и трехъ плоскостей. Перпендикуляры къ прямой въ какой ни есть ея точкѣ. Прямая въ пространствѣ могутъ не пересѣкаться, и быть между тѣмъ не параллельными. Косой многоугольникъ.

2. Перпендикуляры къ прямой въ какой ни есть ея точкѣ, находятся въ одной плоскости. Перпендикуляръ къ плоскости. Чрезъ каждую точку прямой можно провести перпендикулярную къ ней плоскость и только одну. Свойства перпендикуляра къ плоскости и линіи къ ней наклонныхъ.

3. Линія, параллельная перпендикуляру къ плоскости, сама къ ней перпендикулярна, и на оборотъ: перпендикуляры къ плоскости всѣ между собой параллельны. Линія, параллельная одной и той же прямой, параллельна между собою. Изъ точки, внѣ плоскости, можно опустить на послѣднюю одинъ только перпендикуляръ.

4. Линія проведенная параллельно прямой, находящейся въ плоскости, нигдѣ не встрѣчаетъ этой плоскости. Плоскости, перпендикулярныя къ одной прямой, нигдѣ не встрѣчаются. Двѣ плоскости, между собой параллельныя, пересѣкаются третею плоскостію по линіямъ параллельнымъ. Прямая, перпендикулярная къ одной изъ параллельныхъ плоскостей, перпендикулярна и ко всѣмъ.

5. Части параллельныхъ линій, отсѣкаемыя двумя параллельными плоскостями, равны между собой,

Когда стороны двухъ угловъ, лежащихъ въ различныхъ плоскостяхъ, соотвѣтственно параллельны, то углы равны между собою, или, взятые вмѣстѣ, составляютъ два прямые угла, а плоскости ихъ взаимно параллельны. Части двухъ прямыхъ, отсѣкаемыя тремя параллельными плоскостями, пропорціональны между собой.

6. Двугранные углы; ребро, грань или сторона. Измѣреніе двугранныхъ угловъ. Плоскости взаимно перпендикулярныя. Свойства двугранныхъ угловъ, происходящихъ отъ пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей какою ни есть плоскостію. Взаимныя свойства перпендикуляра къ плоскости и плоскостей, перпендикулярныхъ между собой.

ОТДѢЛЪ X.

О многогранныхъ углахъ и о многогранникахъ.

7. Многогранные углы. Всякій плоскій уголъ многограннаго угла менѣе суммы всѣхъ остальныхъ. Въ многогранномъ углѣ, съ углами исходящими, сумма всѣхъ плоскихъ угловъ менѣе четырехъ прямыхъ. Равенство трехгранныхъ угловъ.

8. Многогранники вообще; грани, ребра и вершины. Простѣйшіе виды многогранниковъ: тетраэдръ, пирамида полная и усѣченная, призма прямая и наклонная, призма усѣченная, параллелепипедъ, кубъ или правильный шестигранникъ. Измѣреніе поверхно-

стей многогранниковъ. Поверхность призмы включая основанія и безъ основаній. Равенство и подобіе многогранниковъ вообще, и въ особенности призмъ и пирамидъ. Сравненіе поверхностей подобныхъ многогранниковъ.

9. Отношеніе между площадями сѣченій пирамиды плоскостями параллельными ея основанію. Нахожденіе высоты усѣченной пирамиды.

10. Объёмъ тѣла. Отношеніе объёмовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ при равныхъ основаніяхъ; отношеніе объёмовъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ вообще. Объёмъ прямоугольнаго параллелепипеда. Равномѣрность параллелепипедовъ при равныхъ основаніяхъ и высотахъ. Объёмъ какого ни есть параллелепипеда. Отношеніе объёмовъ двухъ параллелепипедовъ.

11. Объёмы треугольной и многогранной призмы. Отношеніе объёмовъ двухъ призмъ, и въ особенности подобныхъ. Разложеніе треугольной усѣченной призмы на три тетраэдра.

12. Объёмы двухъ пирамидъ, имѣющихъ равномѣрныя основанія и равныя высоты, равны между собой. Объёмъ тетраэдра. Объёмъ пирамиды. Объёмъ усѣченной призмы. Отношеніе объёмовъ двухъ пирамидъ, въ особенности подобныхъ. Объёмъ усѣченной пирамиды.

13. Показать возможность вычисленія объёма какого

ни есть многогранника. Объёмы подобныхъ многогранниковъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ линій. Понятіе о правильныхъ многогранникахъ съ исходящими углами.

ОТДѢЛЪ XI.

О круглыхъ тѣлахъ.

14. Прямой цилиндръ, прямой конусъ и шаръ. Сѣченія цилиндра плоскостями перпендикулярными и параллельными къ его оси. Сѣченіе конуса плоскостію перпендикулярною къ его оси, и плоскостію, проходящею чрезъ ось. Сѣченіе шара. Касательная плоскость къ шару. Кратчайшее разстояніе между двумя точками, взятыми на шаровой поверхности.

15. Поверхности и объёмы цилиндра и конуса. Отношенія между поверхностями цилиндровъ и между ихъ объёмами. Отношенія между поверхностями конусовъ и между объёмами этихъ тѣлъ. Поверхность и объёмъ усѣченного конуса.

16. Поверхности шароваго пояса, шароваго сегмента и всего шара.

17. Объёмъ шароваго сектора и всего шара. Объёмы шароваго сегмента и пояса.

18. Подобіе цилиндровъ и конусовъ. Отношеніе поверхностей и объёмовъ шаровъ, описанныхъ разными радіусами.

19. Отношеніе между поверхностями и объёмами шара и описанныхъ около него цилиндра и конуса.

Примѣчаніе. Программа должна быть выполнена въ первую половину курса; затѣмъ, по окончаніи полу-годоваго экзамена, повторить главныя статьи пройденнаго изъ Математики во всѣхъ четырехъ классахъ Общаго Курса.

Предсѣдатель: Главный Наблюдатель Остроградскій.

Члены: Дѣйств. Статскій Сов. Кушакевичъ.

Полковникъ Павловскій.

Профессоръ Савичъ.

Капитанъ Собоко 1.

Членъ и Редакторъ: Академикъ Буняковскій.

КОНСПЕКТЪ

ПРЕПОДАВАНІЯ НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ,

составленъ на основаніи Наставленія для образованія воспитанниковъ Военно-Учебныхъ-Заведеній, Высочайше утвержденнаго 24-го Декабря 1848 года.

Утверждено ЕГО ИМПЕРАТОРСКИМЪ
ВЫСОЧЕСТВОМЪ НАСЛѢДНИКОМЪ ЦЕ-
САРЕВИЧЕМЪ Главнымъ Начальникомъ.

Начальникъ Штаба Генералъ-Адъютантъ Ростовцовъ.

4 Мая 1831 г.

ОБЩІЯ ЗАМѢЧАНІЯ.

По свидѣтельству опытѣйшихъ Педагоговъ изученіе Геометріи, преимущественно предъ другими науками, способствуетъ развитію и изощренію умственныхъ силъ, утверждаетъ въ здоровой, природной логикѣ и приучаетъ къ той строгости умозаключеній, которая, по превосходству, получила даже названіе *геометрической*. При значительномъ влияніи Геометріи на первоначальное умственное развитіе, вопросъ о способѣ изложенія и преподаванія этой отрасли Математики получаетъ чрезвычайную важность, почему и требуетъ полного и тщательнаго обсужденія. Постараемся разобрать этотъ предметъ съ должнымъ вниманіемъ.

I. Геометрія, рассматривая свойства и измѣренія ограниченнаго пространства, принадлежитъ безспорно къ Прикладной Математикѣ. Устраняя всякое понятіе о веществѣ, въ смыслѣ физическомъ, она, по малому числу основныхъ идей, заимствуемыхъ ею изъ наблюденій, должна занимать въ ряду математическихъ знаній первое мѣсто послѣ *Чистаго Анализа*, который, въ этомъ отношеніи, стоитъ еще выше Геометріи. Въ самомъ дѣлѣ, Геометрія зависитъ и отъ сущности пространства, и отъ нашихъ чувствъ. Еслибъ свойство пространства или природа человека измѣнились, то и самая Геометрія подверглась бы измѣненію; допустивъ, напримѣръ, что пространство получило

четвертое измѣреніе, пришло бы совершенно перемѣнить нашу Геометрію; изслѣдованіе же этого новаго, воображаемаго пространства о четырехъ измѣреніяхъ, путемъ чистаго анализа, не представило бы и тогда никакого затрудненія. Подобнымъ образомъ, Геометрія, для человѣка, лишеннаго отъ рожденія чувства осязанія, была бы наукой отличною отъ настоящей: для него протяженіе имѣло бы только два измѣренія. Что сказано здѣсь о Геометріи, можетъ быть отнесено и ко всѣмъ прикладнымъ наукамъ: съ измѣненіемъ свойства пространства, всѣ онѣ измѣнились бы сами, не говоря даже объ тѣхъ перемѣнахъ, которыя воспослѣдовали бы въ сущности тѣлъ. Но эти предполагаемыя уклоненія отъ настоящихъ нашихъ понятій о протяженіи вообще, не имѣли бы ни малѣйшаго вліянія на Чистый Анализъ.

Хотя многіе писатели относили Геометрію къ Чистой Математикѣ, однакожъ, по сущности своей, она принадлежитъ къ прикладной ея части. Съ другой же стороны, по малочисленности первоначальныхъ понятій, заимствуемыхъ ею изъ показаній нашихъ чувствъ, она, безъ сомнѣнія, должна занимать первое мѣсто въ наукахъ прикладныхъ. Вотъ естественная причина, по которой Начальную Геометрію относятъ къ элементарнымъ частямъ Математики, и помѣщаютъ вслѣдъ за Алгеброй, или, еще чаще, ведутъ её параллельно съ началами Алгебры, то есть съ элементарною частию чистаго математическаго анализа.

Указавъ на мѣсто, которое занимаетъ Геометрія въ обширной рамѣ точныхъ наукъ, слѣдуетъ опредѣлить съ какою цѣлю, въ какомъ объѣмѣ и порядкѣ она должна быть преподаваема при извѣстныхъ условіяхъ, и наконецъ какіе способы изложенія, при разнообразіи обстоятельствъ, поведутъ къ предполагаемой цѣли самымъ надѣжнымъ и естественнымъ путемъ. Займемся рѣшеніемъ этихъ необходимыхъ вопросовъ.

II. Изученіе Геометріи представляетъ двѣ стороны, которыя, можетъ быть, обозначаются въ ней рѣзче нежели въ другихъ наукахъ. Цѣль умозрительная — развитіе силы мышленія — и цѣль практическая — многоразличныя приложенія этой науки въ обществѣ.

Вліяніе основательнаго изученія Геометріи на изощреніе способностей ума есть фактъ, никѣмъ неоспариваемый. Изъ элементарныхъ наукъ, она, безъ сомнѣнія, съ наибольшими ручательствами за успѣхъ, и скорѣе другихъ, развиваетъ природную логику, усиливаетъ вниманіе и способность соображенія, приучаетъ подвергать каждый предметъ обстоятельному, полному разбору, и даетъ правильное направленіе нашимъ сужденіямъ. Человѣкъ, одаренный отъ природы умомъ здравымъ, и изучившій во-время, и главное, раціональнымъ образомъ, эту науку, пріобрѣтеть безсознательно всѣ упоминаемыя качества. Во всякомъ трудѣ его, какого бы рода онъ ни былъ, замѣтна будетъ вѣрность взгляда, логическая послѣдовательность идей и обдуманность, безъ которой ни одно произведеніе ума не можетъ имѣть истиннаго достоинства.

Практическая польза Геометріи въ наукахъ, искусствахъ и ремеслахъ такъ осязательна, что говорить о ней было бы излишнимъ.

Такая двойственность цѣли ведетъ къ вопросу, какъ соразмѣрить объѣмъ преподаванія Геометріи относительно умозрительнаго и практическаго ея значенія? Достоинство науки и важность первой цѣли для средняго и высшаго образованія требуютъ, чтобы цѣлость чисто теоретической стороны Геометріи осталась неприкосновенною, и чтобы слѣдовательно въ изложеніи не ограничивались однѣми истинами, практически полезными. Къ этому можно еще прибавить, что такое ограниченіе, не говоря уже о трудности отдѣлить предложенія практически полезныя отъ тѣхъ, которыя по-видимому не примѣ-

нимы къ практикѣ, могло бы нарушить связь изложенія, столь необходимую во всѣхъ наукахъ, и преимущественно въ математическихъ. Важность призванія воспитанниковъ Военно-Учебныхъ Заведеній безъ сомнѣнія требуетъ, чтобы они изучили Геометрію въ духѣ этого высшаго назначенія науки.

III. Опредѣленіе Геометріи какъ науки о свойствахъ и измѣреніи различныхъ протяженій, указываетъ вполне на кругъ ея занятій, обнимающій всякаго рода изслѣдованія о прямыхъ и кривыхъ линіяхъ, о плоскихъ и кривыхъ поверхностяхъ и о различныхъ тѣлахъ. При такомъ разнообразіи предметовъ, подлежащихъ ея изысканіямъ, возникаетъ вопросъ: какими изъ нихъ должна ограничиться *Элементарная* или *Начальная Геометрія*? Отвѣчать безусловно на этотъ вопросъ конечно невозможно, и, во всякомъ случаѣ, неизбеженъ нѣкоторый произволъ. Но, къ счастью, эта неопредѣленность нисколько не нарушаетъ достоинства науки, и не вредитъ ея преподаванію. Въковой опытъ назначилъ границы Элементарной Геометріи, и какою она была, по своему объѣму, во времена Эвклида — слишкомъ двѣ тысячи лѣтъ тому назадъ, — такою осталась и до нашего времени, по крайней мѣрѣ въ главныхъ предметахъ своихъ. И такъ, согласно со всѣми древними и новыми писателями, Начальная Геометрія должна ограничиваться изложеніемъ основныхъ началъ науки, изслѣдованіемъ свойствъ и измѣреній прямыхъ и круговыхъ линій, прямолинейныхъ фигуръ и площади круга, различными сопряженіями прямыхъ линій въ пространствѣ, плоскостями и ихъ сопряженіями, наконецъ многогранниками и нѣкоторыми предложеніями, относящимися къ тремъ круглымъ тѣламъ. Всѣ остальное относить обыкновенно къ *Высшей* или *Трансцендентной Геометріи*. Впрочемъ, не выходя изъ означенныхъ сей-часъ предѣловъ Начальной Геометріи, объѣмъ ея можетъ быть и увеличенъ и уменьшенъ, ссображаясь съ степенью предполагаемаго математическаго

образованія. Для любителей Геометріи и для тѣхъ, которые занимаются ею по призванію, можно ввести въ эту науку многія предложенія, вообще болѣе любопытныя, нежели полезныя, разныя остроумныя изслѣдованія, какъ на примѣръ о *теоріи параллельныхъ линій*, о *свойствахъ сѣкущихъ (transversales)*, о *теоріи прожекцій* и нѣкоторыя другія статьи. Но, при ограниченности времени, сравнительно съ числомъ предметовъ преподаванія, требуемыхъ условіями прочнаго общаго образованія, было бы неблагоприятно увеличить объѣмъ одной науки съ ущербомъ для другихъ. Поэтому, достаточно озаботиться основательнымъ изложеніемъ необходимыхъ статей Геометріи, соблюдая въ нихъ стройность и соразмѣрность въ частяхъ, и только съ крайнею осмотрительностію прибавлять къ нимъ нѣкоторыя подробности, составляющія, такъ сказать, роскошь науки. Согласно съ сказаннымъ написать этотъ *Конспектъ Начальной Геометріи*.

IV. Систематическое распредѣленіе предметовъ въ курсъ Геометріи было всегда камнемъ преткновенія для писателей; чѣмъ болѣе вникаемъ въ сущность дѣла, тѣмъ болѣе убѣждаемся въ томъ, какъ трудно подвести подъ строгую послѣдовательность разнообразныя предметы ея изслѣдованій.

Нѣтъ надобности приводить съ подробностію возраженія, которыми, въ этомъ отношеніи, подвергались лучшіе трактаты о Геометріи, и даже самыя *Начала Эвклидовы*, признанныя всѣми математиками твореніемъ классическимъ со стороны ясности, образцовой строгости доказательствъ и взаимной связи предложеній. Удивляясь искусству и проницательности, съ которыми Греческій геометръ умѣлъ расположить, въ малѣйшихъ подробностяхъ, статьи входящія въ его *Начала* относительно послѣдовательности доказательствъ, порицають его однакожъ, и можетъ быть не безъ основанія, за неестественность порядка въ разсужденіи самой сущности предметовъ. Для

примѣра приведемъ содержаніе *первой Эвклидовой книги*. Первая задача, помѣщенная вслѣдъ за опредѣленіями, требованіями и аксіомами, есть слѣдующая: *на данной прямой построить равносторонній треугольникъ*. Второе предложеніе: *при данной точкѣ отложить прямую линію, равную данной прямой*. Третье предложеніе: *по даннымъ двумъ прямымъ линіямъ, отнять меньшую отъ большей*. За симъ слѣдуютъ предложенія, относящіеся къ равенству треугольниковъ. Далѣе приведены разныя задачи, какъ то: *раздѣлить уголъ и прямую линію на двѣ равныя части; возставить перпендикуляръ къ прямой линіи; опустить перпендикуляръ*. Потомъ слѣдуютъ свойства смежныхъ и противоположныхъ угловъ и предложенія, относящіеся къ взаимной величинѣ угловъ и сторонъ прямолинейныхъ треугольниковъ. Вслѣдъ за этимъ предлагается *теорія параллельныхъ линій*, основанная у Эвклида на *одиннадцатой его аксіомѣ*, которая, какъ извѣстно, состоитъ въ томъ, что *когда двѣ прямыя линіи пересѣчены третьей, и сумма угловъ внутреннихъ, по одну сторону сѣкущей, меньше двухъ прямыхъ, то эти двѣ линіи, по достаточномъ ихъ продолженіи, непременно пересѣкутся*. Предложеніе 32 относится къ суммѣ угловъ треугольника; доказательство, что ихъ сумма всегда равна двумъ прямымъ угламъ, основано на выведенномъ уже свойствѣ параллельныхъ линій. Дальнѣйшія предложенія имѣютъ предметомъ различныя свойства параллелограмовъ и треугольниковъ относительно равенства ихъ площадей, также рѣшеніе разныхъ вопросовъ, относящихся къ подобнымъ равенствамъ. Наконецъ, Эвклидъ заключаетъ первую книгу своихъ *Началъ* доказательствомъ *Пифагоровой теоремы*, основываясь на предшествовавшихъ свойствахъ площадей треугольниковъ и параллелограмовъ.

Приведенное сей-часъ содержаніе первой книги *Началъ Эвклида* уже достаточно показываетъ, въ какой степени онъ

уклонился отъ естественнаго порядка при изложеніи различныхъ предметовъ Геометріи. Такъ, напримѣръ, онъ начинаетъ съ вопроса о равностороннемъ треугольникѣ, то есть съ фигуры, образуемой тремя равными прямыми, не разсмотрѣвъ предварительно взаимнаго положенія двухъ прямыхъ линій; теоремы и задачи о площадяхъ нѣкоторыхъ фигуръ, слѣдовательно вопросы, относящіеся къ двумъ измѣреніямъ, предшествуютъ у него многимъ предложеніямъ изъ Геометріи объ одномъ измѣреніи, и т. п.

Раздѣленіе Геометріи на *Лонгиметрію*, *Планиметрію* и *Стереометрію* удовлетворяетъ требованіямъ логической послѣдовательности. Далѣе, въ каждую изъ этихъ трехъ частей слѣдовало бы ввести подраздѣленія, придерживаясь систематическаго порядка въ отношеніи сущности излагаемыхъ статей. Такъ напримѣръ *Лонгиметрія* привела бы естественнымъ образомъ къ слѣдующимъ подраздѣленіямъ: *о прямой линіи; о взаимномъ положеніи двухъ прямыхъ линій на плоскости; о совокупленіи трехъ прямыхъ линій на плоскости, и въ частности о треугольникахъ; о совокупленіи большаго числа прямыхъ линій на плоскости или о многоугольникахъ; о круговой линіи; о совокупленіи круговой линіи съ прямыми; о совокупленіи круговыхъ линій какъ между собою, такъ и съ прямыми линіями; объ измѣреніи и сравненіи прямыхъ и круговыхъ линій*.

Подобныя подраздѣленія существовали бы для *Планиметріи* и *Стереометріи*. Впрочемъ, и при этомъ порядкѣ встрѣтилось бы небольшое недоразумѣніе въ отношеніи къ статьѣ *о совокупленіяхъ прямыхъ и плоскостей въ пространство*, разсматриваемыхъ въ самихъ себѣ, независимо отъ площадей или тѣлъ, ими образуемыхъ. Собственно говоря, такія совокупленія не принадлежали бы ни къ одной изъ трехъ поименованныхъ частей. Однакожъ, безъ нарушенія связи, можно отнести

этотъ предметъ къ *Стереометріи*, или изложить его подъ особымъ названіемъ, между *Планиметріею* и *Стереометріею*. Для устраненія всякаго недоразумѣнія, лучше всего раздѣлить Геометрію на двѣ части, именно: *Геометрію на плоскости* и *Геометрію въ пространствѣ*. Такимъ образомъ Геометрія на плоскости составила бы изъ *Лонгиметріи* и *Планиметріи*, а Геометрія въ пространствѣ, изъ статьи о совокупленіи прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ и собственно изъ *Стереометріи*.

Повторяемъ, приведенный выше порядокъ статей, въ логическомъ смыслѣ, былъ бы самый естественный. Но въ дѣйствительности, какъ извѣстно, система изложенія, въ лучшихъ сочиненіяхъ о Геометріи, болѣе или менѣе несогласна съ тою, на которую здѣсь указано. Мы уже замѣтили это уклоненіе въ *Началахъ Эвклидовыхъ*; то же самое можно сказать отчасти и о новѣйшихъ курсахъ, какъ то о курсѣ *Лежандра*, *Лакруа*, *Финка* и множествъ другихъ. *Девелей*, *Сироддъ*, а у насъ *Татариновъ*, въ своихъ сочиненіяхъ ближе придерживались систематическаго порядка; за то они впади въ нѣкоторыя неудобства, не всегда выкупаемая преимуществомъ естественнаго расположенія статей.

Затрудненіе представить геометрическія истины въ логической послѣдовательности относительно сущности разсматриваемыхъ предметовъ происходитъ отъ того, что часто предложенія, которыя по систематическому порядку должны бы предшествовать другимъ, основаны между тѣмъ, по самому ихъ свойству, на сихъ послѣднихъ. Въ иныхъ случаяхъ можно конечно устранить такое неудобство, но не всегда. Напримѣръ, говоря о свойствахъ перпендикуляровъ къ прямымъ линіямъ, должно бы предположить, что умѣютъ возсталять и опускать ихъ, или еще, говоря объ углѣ, надлежало бы знать, какъ строится данный уголъ, а для этого необходимо употре-

бленіе циркуля, а слѣдовательно и понятіе о кругѣ. Вотъ причины, по которымъ, въ нѣкоторомъ смыслѣ, всѣ курсы Геометріи болѣе или менѣе напоминаютъ своимъ видомъ *сборники*, хотя систематическіе, *геометрическихъ предложеній*. При такомъ затрудненіи для соглашенія условій логической связи съ другими качествами изложенія, должно обратить особенное вниманіе на то, чтобы стараніе придать статьямъ систематическое расположеніе не повредило ясности и строгости геометрической, потому что эти достоинства, нѣтъ сомнѣнія, должно ставить выше всѣхъ другихъ.

V. Изъ этихъ соображеній видимъ, какъ трудно составить безусловно-хорошее Руководство по предмету *Элементарной Геометріи*. Чтобы по возможности приблизиться къ главнымъ требованіямъ отъ подобнаго труда, можно, кажется, постановить слѣдующія, необходимыя условія:

Сохранить въ изложеніи геометрическихъ предложеній ту ясность, отчѣтливость, точность въ выраженіяхъ и строгость доказательствъ, какими отличаются сочиненія древнихъ геометровъ, принявъ за образецъ въ этомъ отношеніи *Эвклидовы Начала*. При расположеніи предметовъ Геометріи придерживаться, по мѣрѣ возможности, предложеннаго выше систематическаго порядка, отступая отъ него только тамъ, гдѣ, по зрѣломъ обсужденіи, иначе поступить нельзя, не нарушивъ первыхъ изъ приведенныхъ сей-часъ условій. Наконецъ, не выдавать полудоводовъ за удовлетворительныя доказательства, какъ въ нѣкоторыхъ Руководствахъ (чему можетъ служить примѣромъ *теорія параллельныхъ линій*), а оговаривать подобныя мѣста, и всегда ставить на видъ, почему именно приводимыя доводы не имѣютъ надлежащей силы или строгости.

VI. Говоря о порядкѣ статей по ихъ содержанію, необходимо также обратить вниманіе на *аксіомы*, *опредѣленія*, *леммы* и другія предложенія. Такъ какъ *аксіома есть истина сама по*

себя очевидна, то обременять Руководства подобными предположениями совершенно бесполезно. Напримѣръ, къ чему ставить въ главу началъ Геометріи слѣдующія очевидныя понятія, общія всѣмъ родамъ величинъ: *цѣлое больше своей части; часть меньше своего цѣлаго; цѣлое равно составнымъ своимъ частямъ, взятымъ; два количества, равныя третьему, равны между собою*, и другія подобныя? Но есть немногія аксіомы, свойственныя собственно Геометріи, и которыя должны непременно войти въ курсъ этой науки, какъ напримѣръ: *между двумя точками можно провести одну только прямую линію; прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками; два протяженныя величины одного рода равны между собою, когда, по наложеніи одной на другую, онѣ совмѣстятся во всѣхъ своихъ точкахъ; объемлющая линія или поверхность больше объемлемой*. При введеніи аксіомъ въ Геометрію, по мѣрѣ ихъ надобности, должно быть тѣмъ осмотрительнѣе, что писатели далѣко не согласны между собою на счётъ очевидности нѣкоторыхъ изъ нихъ. Такъ, напримѣръ, у *Эвклида* предложеніе о равенствѣ всѣхъ прямыхъ угловъ помѣщено между аксіомами (акс. 10), а у *Лександра* это равенство составляетъ теорему, которую онъ доказываетъ основываясь на аксіомѣ о равенствѣ по наложенію и на опредѣленіи прямого угла. Въ особенности извѣстная *одиннадцатая аксіома* *Эвклидова* заслужила нареканіе большей части математиковъ, которые хотѣли сдѣлать изъ нея теорему; но всѣ попытки ихъ были болѣе или менѣе неудачны. Объ этой аксіомѣ будетъ говорено съ надлежащими подробностями въ Примѣчаніи къ № 4 (Отдѣлъ I).

Опредѣленія могутъ быть раздѣлены на два рода: 1^о *опредѣленіе дѣйствительное, исчисляющее всѣ признаки, которые составляютъ сущность опредѣляемаго предмета, и отличаютъ его отъ всѣхъ другихъ*, и 2^о *опредѣленіе именное,*

объясняющее смыслъ, который придаемъ опредѣляемому нами слову. Въ чистомъ анализѣ, и даже въ Геометріи, употребляются, собственно говоря, только *именныя опредѣленія*; такъ опредѣляя термины: *сложеніе, вычитаніе, дробь, квадратное число, треугольникъ, шаръ* и проч., мы только объясняемъ то, что разумѣемъ подъ этими словами. Здѣсь можно замѣтить мимоходомъ, что *дѣйствительныя опредѣленія* нѣкоторыхъ понятій, предлагаемыя математиками и метафизиками, нерѣдко бывають неудачны, и это болѣею частію происходитъ отъ того, что они пытаются опредѣлить *простыя, первоначальныя идеи*, не подлежащія опредѣленію. Таковы, напримѣръ, опредѣленія *величины, линіи, пространства, времени* и проч. Въ самомъ дѣлѣ, если вникнемъ въ сущность дѣлаемыхъ опредѣленій, то увидимъ, что въ нихъ подразумѣвается или повторяется, болѣе или менѣе скрытнымъ образомъ, понятіе о самомъ опредѣляемомъ предметѣ. Такъ говоря: *величина есть все то, что можетъ быть вообразено большимъ или меньшимъ*, мы, такъ сказать, развиваемъ только идею о величинѣ, а не опредѣляемъ самой величины, потому что понятіе о *большемъ* или *меньшемъ* нисколько не проще понятія объ опредѣляемомъ предметѣ, и уже заключаетъ его. Равнымъ образомъ, когда говоримъ: *прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками*, то можно спросить, будетъ ли понятіе о *разстояніи* проще идеи о *линіи* вообще; конечно оно тождественно съ нимъ, а потому самое опредѣленіе не удовлетворяетъ логическимъ требованіямъ. Однимъ словомъ, подобныя опредѣленія должно принимать не иначе, какъ только въ смыслѣ объясненій или развитій первоначальныхъ идей, а отнюдь не за дѣйствительныя опредѣленія.

Обратимся теперь въ частности къ *именнымъ опредѣленіямъ*, обыкновенно помѣщаемымъ въ большемъ числѣ при самомъ вступленіи въ Геометрію, даже въ лучшихъ сочиненіяхъ по

этой наукѣ. Вникнувъ въ сущность дѣла, нельзя не порицать такого обыкновенія. Такъ, напримѣръ, въ Геометріяхъ *Эвклида* и *Лежандра* находимъ, между прочимъ, въ самомъ началѣ опредѣленія фигуръ: *квадрата, прямоугольника и параллелограмма* (у Эвклида опр. 30, 31 и 33, а у Лежандра опр. XVII). Не говоря уже о томъ, что бесполезно безъ всякой надобности обременять память начинающихъ множествомъ, и болѣею частію незнакомыхъ имъ терминовъ, при самомъ вступленіи въ изученіе новой для нихъ науки, мы обратимъ вниманіе на другое обстоятельство, болѣе важное, обнаруживающее несвоевременность такихъ опредѣленій въ логическомъ смыслѣ. Дѣйствительно, начинающему говорить, что *квадратомъ называется четырехугольникъ, котораго стороны равны и углы прямые*, а онъ, въ то время, не знаетъ даже, можетъ ли быть такая фигура; существованіе ея доказывается на основаніи теоріи параллельныхъ линій, о которой говорится только въ послѣдствіи. То же самое можно повторить о *прямоугольнике* и о *параллелограммѣ*. Мы полагаемъ, что предлагать опредѣленія отвлеченныхъ предметовъ, когда существованіе ихъ не можетъ быть доказано ученикамъ, и въ особенности при изученіи Геометріи, науки по превосходству логической, есть аномалія, которую ничѣмъ оправдать нельзя. Поэтому, при составленіи Конспекта, мы вводили опредѣленія только по мѣрѣ ихъ надобности, и наблюдая притомъ, чтобы возможность опредѣляемаго предмета не подлежала никакому сомнѣнію.

Нѣкоторые писатели, и въ числѣ ихъ *Девелей*, настаивали на томъ, чтобы *теоремы* въ Геометріи были помѣщаемы послѣ ихъ доказательствъ, а не передъ ними, какъ обыкновенно дѣлается. Въ логическомъ отношеніи это замѣчаніе справедливо: и въ самомъ дѣлѣ, теорема есть слѣдствіе, проистекающее изъ соединенія нѣкоторыхъ уже извѣстныхъ истинъ; поэтому, при естественномъ порядкѣ, она должна слѣдовать за рядомъ упо-

требляемыхъ заключеній, а не предшествовать имъ. Но, съ другой стороны, если примемъ въ соображеніе, что почти во всѣхъ случаяхъ разсужденія, предшествующія теоремѣ, достаточно уже объясняютъ ея смыслъ, и что сверхъ того нерѣдко, выражая теорему прежде ея доказательства, мы сокращаемъ изложеніе и облегчаемъ память, то, безъ особеннаго неудобства, можно отступить отъ сказаннаго порядка.

Говоря о предложеніяхъ, мы замѣтимъ еще, что надобно по возможности избѣгать излишняго употребленія *леммъ*, то есть *вспомогательныхъ истинъ, не имѣющихъ прямой связи съ доказываемою*. Частое употребленіе этого рода предложеній вообще изобличаетъ недостатокъ обдуманности въ подробностяхъ плана излагаемой науки. Не надобно также терять изъ виду *обратныхъ предложеній* въ тѣхъ случаяхъ, когда они представляютъ что нибудь примѣчательное, и стараться наводить учащихся самихъ на ихъ доказательство. Въ разсужденіи задачъ, то есть *вопросовъ, требующихъ рѣшенія или построенія*, надлежало бы помѣщать ихъ такъ, чтобы онѣ всегда предшествовали предложеніямъ, основывающимся на возможности, и даже, въ строгомъ смыслѣ, на самомъ знаніи ихъ рѣшенія. Къ сожалѣнію, удовлетворить вполне этому условію почти невозможно. Такъ, напримѣръ, говоря о перпендикулярахъ, можно показать существованіе такихъ линій; но какъ самое построеніе ихъ основано, или на равенствѣ треугольниковъ, или на свойствѣ круга, то оно и должно быть отнесено далѣе. Наконецъ, должно стараться по возможности, чтобы въ словесное выраженіе предложеній не вводили буквъ или другихъ произвольныхъ означеній, зависящихъ отъ чертежа. Хотя, въ иныхъ случаяхъ, употребленіе буквъ и упростило бы выраженіе предложенія, но, съ другой стороны, имѣетъ ту невыгоду, что дѣлаетъ его невразумительнымъ безъ

пособія предполагаемаго построения, почему сущность того, что доказываемъ, скорѣе забывается.

VII. Для доказательства, или открытія истины, въ Геометріи, какъ и въ другихъ наукахъ, употребляются два способа, *аналитическій и синтетическій*. *Аналитическій способъ есть такой видъ умствования, въ которомъ предполагаютъ найденнымъ то, что надобно доказать, и, на этомъ уже основаніи, выводятъ различныя слѣдствія, пока не дойдутъ до истины, очевидной самой по себѣ, или доказанной прежде.* При употребленіи *синтетическаго* способа дѣйствуютъ обратно, именно: *изъ началъ, уже извѣстныхъ, выводятъ рядъ заключеній, пока не дойдутъ до той истины, которую имѣютъ въ виду доказать.* Докажемъ, для примѣра, обоими путями, весьма простую теорему *о суммѣ угловъ треугольника*, предполагая теорію параллельныхъ линій уже извѣстною.

ТЕОРЕМА: *Во всякомъ прямолинейномъ треугольникѣ сумма трехъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АНАЛИТИЧЕСКОЕ.

По сущности аналитическаго способа слѣдуетъ допустить теорему. Пусть будетъ ABC данный треугольникъ и A, B, C его углы. Проведя линію CD такъ, чтобы уголъ DCA равнялся углу A треугольника, окажется, по свойству параллельныхъ линій, что CD параллельна AB. Далѣе, проведемъ CE такъ, чтобы уголъ ECB равнялся углу B треугольника; линія CE будетъ также параллельна AB. Съ другой стороны, такъ какъ сумма трехъ угловъ при точкѣ C, по допущенной теоремѣ, равна двумъ прямымъ угламъ, то DCE составитъ одну прямую линію, параллельную AB. Изъ справедливости этого результата, состоящаго въ томъ, что чрезъ данную точку C можно провести только одну линію, параллельную AB, заключаемъ непосредственно и о справедливости самой теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СИНТЕТИЧЕСКОЕ.

Слѣдуя способу синтетическому для доказательства теоремы, о которой идетъ рѣчь, мы уже не должны вводить ея слѣдствія, состоящаго въ томъ, что *сумма трехъ угловъ въ треугольникѣ равна двумъ прямымъ угламъ*, а ищемъ выраженіе для искомой суммы, основываясь на началахъ, предполагаемыхъ уже намъ извѣстными. И такъ, проведемъ чрезъ вершину C треугольника ABC (тотъ же чертежъ) прямую DCE, параллельную основанію AB; по свойству параллельныхъ AB, DE, пересѣкаемыхъ прямыми AC, BC, окажется, что уголъ DCA равенъ углу A даннаго треугольника, а уголъ ECB, углу B того же треугольника. Слѣдовательно, при точкѣ C образуются три смежные угла, одинаковые съ тремя углами треугольника ABC, и сумма ихъ будетъ равна двумъ прямымъ угламъ, въ чемъ и состоитъ теорема.

Къ аналитическому способу слѣдуетъ отнести, какъ видоизмѣненіе его, *способъ приведенія къ противорѣчію* или *доводъ къ нелпности* (réduction à l'absurde). Въ доказательствахъ чрезъ приведеніе къ противорѣчію *выводятъ справедливость предложенія, положительнаго или отрицательнаго, основываясь на томъ умствованіи, что если бы предполагалось слѣдствіе не было допущено, то изъ этого произошло бы какое нибудь явное противорѣчіе или очевидная невозможность.* Такъ, напримѣръ, если бы имѣли въ виду доказать предыдущую теорему *чрезъ приведеніе къ противорѣчію*, то слѣдовало бы принять (тотъ же чертежъ) $A+B+C > 2$ *прямыхъ*, а также $A+B+C < 2$ *прямыхъ*. Оба эти предположенія, чрезъ нанесеніе угловъ A и B при точкѣ C, привели бы къ заключенію, что DE есть линія ломаная, а это очевидно противорѣчитъ тому свойству параллельныхъ линій, по которому DE должно составлять одну и ту же прямую.

Отсюда заключаемъ, что сумма $A+B+C$ не можетъ быть ни болѣе, ни менѣе двухъ прямыхъ угловъ, а слѣдовательно *равна двумъ прямымъ угламъ*.

Доказательства, основанныя на *приведеніи къ противорѣчію*, введенныя Эвклидомъ въ Геометрію, были въ большомъ употребленіи у древнихъ геометровъ; да и теперь руководствуются иногда этимъ способомъ, даже въ высшемъ анализѣ, и преимущественно въ Теоріи Чиселъ. Впрочемъ, справедливо замѣчено, что такому роду доказательствъ должно вообще предпочитать доказательства прямые, аналитическія или синтетическія, которыя выставляютъ истину во всемъ ея свѣтѣ и очевидности. Умствованіе, основанное на приведеніи къ противорѣчію, хотя конечно убѣждаетъ разумъ, но не просвѣщаетъ его въ такой степени, и въ особенности, когда доказываемое предложеніе нѣсколько сложно. Поэтому должно избѣгать въ Геометріи слишкомъ частаго употребленія этого рода непрямыхъ доказательствъ.

Съ прошедшаго столѣтія многіе математики разумѣютъ подъ *анализомъ способъ рѣшать математическія задачи, или доказывать предложенія посредствомъ вычисленій, а подъ синтезомъ, употребленіе построеній и вообще пріемовъ геометрическихъ для достиженія той же цѣли*. Но такія опредѣленія не всегда согласуются съ общими понятіями о способахъ аналитическомъ и синтетическомъ. Очень можетъ случиться, что доказывая какую либо истину, или рѣшая задачу, мы употребляемъ вычисленія, а придерживаемся между тѣмъ способа синтетическаго, и на-оборотъ, не вводя вычисленій или уравненій, руководствуемся способомъ аналитическимъ.

Въ изложеніи Начальной Геометріи, какъ и всякой другой отрасли нашихъ знаній, порядокъ статей можетъ быть только синтетическимъ. Передавая какой ни есть рядъ истинъ, обнимающій науку, мы необходимо должны переходить отъ про-

стѣйшихъ началъ къ болѣе сложнымъ, такъ чтобы изъ предшествующихъ истинъ проистекали послѣдующія. Что же касается до способа доказательствъ отдѣльныхъ теоремъ, или до рѣшенія вопросовъ, то въ этомъ отношеніи нельзя постановить общаго правила: въ иныхъ случаяхъ преимущество останется на сторонѣ способа аналитическаго, въ другихъ, на сторонѣ синтетическаго. Нерѣдко даже доказательство теоремы, нѣсколько сложной, будетъ въ одно время относиться къ обоимъ способамъ, и это не повлечетъ за собой никакого неудобства. При рѣшеніи геометрическихъ вопросовъ можно чаще придерживаться аналитическаго способа, то есть, предположить задачу рѣшенною, и изобразить чертежемъ зависимость между неизвѣстными линіями и тѣми, которыя или даны, или могутъ быть опредѣлены непосредственно; потомъ, на основаніи этой зависимости и извѣстныхъ уже началъ, дойти до рѣшенія предложенной задачи.

Считаемъ излишнимъ останавливаться на разборѣ нѣкоторыхъ частныхъ пріемовъ, придуманныхъ въ разные времена для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ, въ которые входитъ понятіе о безконечности. Сюда относятся задачи о несоизмѣримыхъ величинахъ, и преимущественно спрямленіе и квадратура круговой и другихъ кривыхъ линій, также опредѣленіе поверхностей и объёмовъ разныхъ тѣлъ. Древніе геометры употребляли въ изслѣдованіяхъ этого рода *способъ истощеній (méthode d'exhaustion)*, который, въ послѣдствіи, былъ представленъ въ разныхъ видоизмѣненіяхъ подъ названіями способовъ: *недѣлимыхъ, неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, первыхъ и послѣднихъ содержаній* или *способа предъловъ, способа исчезающихъ величинъ, способа безконечно-малыхъ* и проч. Всѣ эти пріемы, по сущности своей, относятся къ способу синтетическому.

Способъ безконечно-малыхъ величинъ, введенный въ препо-

давание Геометрии воспитанникамъ Военно-Учебныхъ Заведеній, и имѣющій по простотѣ своей несомнѣнное преимущество предъ другими, сей-часъ поименованными, изложенъ въ Конспектѣ въ объѣмѣ достаточномъ для предполагаемой цѣли (Отдѣлъ V, № 19).

Вотъ, въ главныхъ очеркахъ, тѣ соображенія, которыми должно руководствоваться при изложеніи Начальной Геометріи. Въ дополнение къ сказанному сдѣлаемъ еще нѣкоторыя замѣчанія, относящіяся къ самому преподаванію этой науки, принимаясь къ потребностямъ воспитанниковъ Военно-Учебныхъ Заведеній, и сообразуясь во всемъ съ Высочайше утвержденнымъ 24-го Декабря 1848 года Наставленіемъ для ихъ образованія.

VIII. Имѣя въ виду съ одной стороны возрастъ воспитанниковъ, отъ 13 до 16 лѣтъ, съ другой же будущее ихъ назначеніе, а также время, удѣляемое на каждый предметъ, должно преподавать Геометрію не наглядно, какъ бы съ цѣлію заготовить только запасъ свѣдѣній, полезныхъ для практическихъ ея приложений. Сколько цѣль эта не важна, но все же она второстепенная: главная должна состоять въ томъ, чтобы изученіе этой науки послужило къ усилению умственной стороны учащагося, развѣвъ въ немъ память, вниманіе, наблюдательность, соображеніе и наконецъ разумъ, высшую способность ума. Для достиженія желаемого успѣха въ этомъ отношеніи, необходимо придерживаться слѣдующихъ, главныхъ правилъ:

Излагая Геометрію по Программѣ, и соображаясь съ указаціями Конспекта, Преподаватель, при доказательствѣ различныхъ предложеній или рѣшеній задачъ, долженъ дѣлать полное исчисленіе всѣхъ обстоятельствъ, относящихся къ вопросу, соблюдать вездѣ строгую послѣдовательность въ заключеніяхъ, указывать по возможности на различные виды употре-

бляемыхъ сужденій, и даже изрѣдка предлагать воспитанникамъ паралогизмы, наводя потомъ ихъ самихъ на открытіе ложныхъ предположеній или заключеній. На метафизическихъ началахъ науки нѣтъ надобности много останавливаться: это дѣло должно предоставить ученымъ по призванію, а для прочности общаго образованія достаточны здравыя и основательныя познанія, которыя въ Геометріи пріобрѣтаются независимо отъ отвлеченныхъ понятій о сущности разсматриваемыхъ въ ней предметовъ. Въ замѣтъ метафизическихъ разсужденій полезно, чтобы преподающій дѣлалъ иногда краткія историческія указанія. Напримѣръ, говоря объ 11 аксіомѣ *Эвклидовой*, объ отношеніи окружности круга къ диаметру, найденной *Архимедомъ*, о *Пифагоровой* теоремѣ, *Гиппократовыхъ* луночкахъ и проч., слѣдуетъ сказать, кто были эти древніе философы, трудамъ которыхъ столько обязана Математика.

Считаемъ также неизлишнимъ обратить вниманіе Преподавателей на одно обстоятельство, по-видимому маловажное, но которое однакожъ, по нашему убѣжденію, заслуживаетъ полнаго вниманія. Мы разумѣемъ черченіе на бумагѣ или на доскѣ геометрическихъ фигуръ, служащихъ для доказательства предложеній или для рѣшенія задачъ. Преподаватель долженъ непремѣнно настаивать на томъ, чтобы воспитанники исполняли чертежи, не говоримъ щеголеватого, но соблюдая правильность въ той степени, въ какой это возможно при черченіи отъ вольной руки, и притомъ такъ, чтобы не нарушать, при требованіяхъ вопроса, извѣстной послѣдовательности въ проведеніи различныхъ вспомогательныхъ линій и приближенной ихъ соразмѣрности. При частомъ употребленіи чертежей въ Геометріи, постоянное выполненіе этого условія незамѣтнымъ образомъ пріучитъ воспитанника къ порядку, къ логической связи въ представленіяхъ, усилитъ его память и соображеніе,

однимъ словомъ, будетъ имѣть самое благотворное вліяніе на умственную его сторону.

Рѣшеніе разнообразныхъ практическихъ вопросовъ изощряя съ одной стороны способности учащихся, а съ другой увеличивая итогъ полезныхъ въ общежитіи истинъ, должно также считать необходимымъ условіемъ въ преподаваніи Начальной Геометріи. При подобныхъ упражненіяхъ, преподающій не долженъ терять изъ виду, чтобы воспитанникъ производилъ всѣ построенія не наглядно, а вполнѣ сознавалъ начала и правила, на которыхъ они основаны.

Тщательнымъ исполненіемъ этихъ общихъ условій, цѣль преподаванія Начальной Геометріи будетъ достигнута. Что же касается до частныхъ подробностей изложенія, требуемыхъ отдельными статьями этой науки, то онѣ помѣщены въ текстъ самаго Конспекта.

IX. Въ *Общихъ Замѣчаніяхъ* къ Конспекту Арифметики поставлены на видъ довольно подробно условія успѣшнаго преподаванія всякаго предмета относительно познаній Наставника. Скажемъ и здѣсь, что объѣмъ свѣдѣній хорошаго Преподавателя Начальной Геометріи, непременно долженъ превышать, и даже довольно значительно, объѣмъ читаемаго имъ курса. Кромѣ Элементарной Алгебры, которую онъ долженъ изучить вполнѣ, ему необходимы основательныя познанія въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ, выходящихъ за предѣлы началъ этой науки, а именно въ *Тригонометріи Прямолинейной* и *Сферической*, а также въ *Начертательной Геометріи* и въ началахъ *Геометріи Аналитической*. Весьма желательно даже, чтобы Учитель Геометріи имѣлъ хотя немногія, но, главное, здравыя и вѣрныя понятія объ *теоріи функций* или *анализѣ бесконечно-малыхъ*, много способствующемъ развитію нѣкоторыхъ геометрическихъ теорій. Русскія книги, почти необходимыя собственно для Преподавателей Геометріи, суть слѣду-

ющія: *Эвклидовы начала; Основанія Геометріи и Тригонометріи Ламандра; Начальныя основанія Геометріи Лакруа; Опытъ о усовершенствованіи элементовъ Геометріи, Акад. Гурьева; Курсъ Аналитической Геометріи Брашмана; Основанія Начертательной Геометріи Севастьянова*, 2-е изд. 1834 года.

Кромѣ этихъ книгъ не бесполезно обратить вниманіе и на слѣдующіе курсы Геометріи:

Eléments de Géométrie par Em. de Veley; 3-me édition, 1830.

Géométrie élémentaire par L. B. Francoeur; 1838.

Géométrie élémentaire basée sur la théorie des infiniment petits, suivie de la Trigonométrie rectiligne et sphérique; 2-me édition, par P. J. E. Finck.

Начальныя основанія Геометріи *Степана Райковскаго*, 1827 г.

Начальныя основанія Геометріи *П. Татауринова*, 1842 г.

Начальныя основанія Геометріи соч. *Сирода*. Перевелъ и дополнилъ *Ф. Симашко*, 2 части, 1847 г.

Преподавателямъ, занимающимся спеціально Геометрією, и желающимъ ближе ознакомиться съ этою наукою какъ въ историческомъ отношеніи, такъ и въ разсужденіи ея постепеннаго развитія, мы можемъ указать на превосходное сочиненіе Французскаго математика *Шаля*: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne*; par M. Chasles, 1837. Также, въ *Histoire des Mathématiques* par J. F. Montucla и въ *Développement nouveau de la partie élémentaire des Mathématiques* (1778) par M. Bertrand, а равно въ разныхъ академическихъ мемуарахъ, между прочимъ въ *Reflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles*, par Legendre (*), любители Геометріи найдутъ много любопыт-

(*) Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France; T. XII, 1833.

наго, и даже необходимаго для тѣхъ, которые желаютъ углубиться въ эту науку. Относительно самаго способа ея преподаванія, Учители могутъ воспользоваться нѣкоторыми замѣчаніями, находящимися въ сочиненіи Лакруа: *Essai sur l'enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier.*

Наконецъ, для практическихъ упражненій воспитанниковъ въ Геометріи, можно, соображаясь съ назначеніемъ Военно-Учебныхъ Заведеній, выбирать задачи между прочимъ изъ слѣдующихъ книгъ:

Applications de Géométrie et de Mécanique à la Marine, aux ponts et chaussées, etc. Par *Charles Dupin*; Paris, 1822.

Géométrie appliquée à l'industrie. Par *C. L. Bergery*; 1835.

Mascheroni. Problèmes de Géométrie résolus de différentes manières; traduit de l'Italien; 1838.

Théorèmes et problèmes de Géométrie élémentaire, avec leur démonstration et leur solution raisonnée, suivis de questions d'examen. Par *Lefrémoire*; 1847.

Théorèmes et problèmes de Géométrie, par Reynaud; 1833.

Въ упомянутой выше *Géométrie élémentaire* par *P. J. E. Finck* помѣщена отдѣльная статья подъ заглавіемъ: *théorèmes à démontrer et problèmes à résoudre*, изъ которой можно сдѣлать полезный выборъ.

На Русскомъ языкѣ:

Практическія упражненія въ Геометріи, или собраніе геометрическихъ вопросовъ и задачъ съ ихъ отвѣтами и рѣшеніями; *П. Гурьевымъ* и *А. Дмитриевымъ*; 2 части, 1844 г.

X. Программа Геометріи для воспитанниковъ Военно-Учебныхъ Заведеній содержитъ въ себѣ:

ПЕРВЫЙ ГОДЪ.

Введеніе.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

- I. Объ углахъ и линіяхъ перпендикулярныхъ, наклонныхъ и параллельныхъ.
- II. Прямолинейныя фигуры и измѣреніе прямыхъ линій.

ВТОРОЙ ГОДЪ.

- III. Круговая линія. Измѣреніе угловъ.
- IV. Задачи, относящіяся къ предъидущимъ Отдѣламъ.
- V. Пропорціональныя линіи и подобныя прямолинейныя фигуры.
- VI. Задачи, относящіяся къ предъидущему Отдѣлу.
- VII. Измѣреніе и сравненіе площадей многоугольниковъ и круга.
- VIII. Задачи, относящіяся къ вычисленію площадей.

ТРЕТІЙ ГОДЪ.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

- IX. Прямыя линіи и плоскости, разсматриваемыя въ пространствѣ.
- X. О многогранныхъ углахъ и о многогранникахъ.
- XI. О круглыхъ тѣлахъ.

Примѣчаніе. Статьи Программы Геометріи объяснены въ Конспектѣ одна за другой, слѣдуя порядку нумеровъ. Напечатанное мелкимъ шрифтомъ въ Конспектѣ, не обязательно для воспитанниковъ.

ПЕРВЫЙ ГОДЪ.

ВВЕДЕНІЕ.

1. Преподаватель приступитъ къ изложенію Геометріи развитіемъ первоначальнаго понятія о пространствѣ, ограниченномъ и неограниченномъ, приобретаемаго всѣми издѣтства безъ всякаго посторонняго объясненія. При этомъ развитіи нѣтъ никакой надобности входить въ метафизическія разсужденія о самой сущности пространства: достаточно изложить предметъ въ слѣдующемъ видѣ и объѣмѣ:

Если, въ окружающихъ насъ предметахъ, примемъ въ разсмотрѣніе только *мѣсто*, которое они занимаютъ въ пространствѣ, независимо отъ самаго ихъ вещества, то получимъ понятіе о *протяженіи*. По множеству существующихъ предметовъ, мѣста или ограниченные пространства, ими занимаемыя, весьма разнообразны: такъ напримѣръ книга, ящикъ, ядро и проч. безъ сомнѣнія отличаются видомъ и величиною одни отъ другихъ. Во всѣхъ естественныхъ тѣлахъ, кромѣ наполняемаго ими мѣста, замѣчаемъ еще два другіе рода протяженій, именно: наружную оболочку или *поверхность* тѣла и самыя предѣлы этой наружной оболочки, напримѣръ *края* книги, ящика, или разныя *черты*, проведенныя на поверхности ядра.

Всякое протяженіе можно разсматривать въ отношеніи къ его виду, а также сравнивать съ другимъ, одного съ нимъ

рода, или измѣрять его. Наука, занимающаяся такими изслѣдованіями, называется *Геометріей*. Въ прежнія времена она имѣла предметомъ одно только измѣреніе полей, почему ей и дали тогда названіе *Геометріи*, которое, по Гречески, означаетъ *Землемѣріе*.

Мѣсто, занимаемое всякимъ естественнымъ предметомъ, или иначе, всякую ограниченную часть пространства, называютъ геометрическимъ тѣломъ, или, для сокращенія рѣчи, просто тѣломъ. Поэтому, между тѣломъ *дѣйствительнымъ* и *геометрическимъ* та разница, что первое состоитъ изъ вещества, и слѣдовательно *непроницаемо*; второе же, означая только часть пространства, не имѣетъ никакого состава, и во всемъ протяженіи своемъ *проницаемо*. Хотя тѣло геометрическое не подлежитъ нашимъ чувствамъ, но умъ хорошо постигаетъ его чрезъ отвлеченіе свойствъ матеріи.

Разсматриваніе геометрическаго тѣла, будетъ ли оно ограничено со всѣхъ сторонъ (*кубъ, шаръ* и проч., о которыхъ всякій имѣетъ наглядное понятіе), или не со всѣхъ (*цилиндръ, конусъ* и проч.), приводитъ къ различію *трехъ родовъ протяженій*, именно: *объема тѣла* — составляющаго часть пространства; *поверхности* — служащей предѣломъ объему, и *линіи* — предѣломъ поверхности. Наконецъ, предѣлъ линіи, не имѣющей никакого протяженія, называется *точкою*.

Эти три рода протяженія можно вообразить независимо одно отъ другаго; они совершенно различны между собою, и не допускаютъ взаимнаго сравненія. Такъ, напримѣръ, разсматривая какое ни есть тѣло, положимъ для ясности *ящикъ*, мы замѣчаемъ въ немъ *вмѣстимость* или *объемъ*, что и составляетъ одинъ изъ трехъ родовъ протяженій; потомъ видимъ въ немъ *стороны* или боковыя *поверхности* — другой родъ протяженія; наконецъ *края* или *линіи*, гдѣ соединяются подѣломъ доски — третій родъ протяженія. Поименованные три

рода протяженій, какъ сей-часъ сказано, нельзя сравнивать между собою: дѣйствительно, можно ли сказать, напримѣръ, что вмѣстимость ящика вдвое, втрое больше его края или длины, или еще, что такая-то сторона вчетверо меньше его вмѣстимости?

Отъ разсматриванія геометрическаго тѣла легко перейти къ понятію о поверхности и линіи еще слѣдующимъ образомъ: раздѣлимъ мысленно тѣло на какія ни есть части; предѣлъ, отдѣляющій одну изъ этихъ частей отъ другой, называется *поверхностію*. Подобнымъ образомъ, раздѣлимъ поверхность на двѣ произвольныя части; предѣлъ, отдѣляющій одну изъ нихъ отъ другой, будетъ *линія*. Наконецъ, мѣсто безъ протяженія, въ которомъ линію раздѣляютъ на двѣ части, есть *точка*.

Три протяженія отличаютъ одно отъ другаго числомъ *измѣреній*. И такъ, говорятъ: *объемъ или тѣло имѣетъ три измѣренія, поверхность — два, линія — одно*. Войдемъ по этому предмету въ нѣкоторыя подробности.

Мы сказали, что всякое *тѣло* имѣетъ *три измѣренія*; есть тѣла, въ которыхъ то, что мы называемъ измѣреніями, усматриваются непосредственно. Такъ мы прямо видимъ *длину* ящика, *ширину* и *высоту* его. *Длина, ширина и высота* составляютъ *три измѣренія лица*. Въ нѣкоторыхъ тѣлахъ три измѣренія не обнаруживаются такъ просто, напримѣръ въ *ядрѣ*, то есть въ *шарѣ*. Впрочемъ, раздѣливъ подобныя тѣла надлежащимъ образомъ на части, можно, въ каждой изъ нихъ, открыть упоминаемыя три измѣренія, что въ послѣдствіи будетъ объяснено подробно (*).

(*) При опредѣленіи площади круга, круговаго сегмента и сектора, также при разнисканіи объемовъ многогранниковъ, поверхности шара, его объема, объема конуса и цилиндра, представится надобность въ подобныя разложе-

Поверхность имѣетъ два измѣренія: *длину* и *ширину*. Такъ, напримѣръ, каждая изъ сторонъ ящика простирается въ *длину* и *ширину*.

Наконецъ, линия имѣетъ только одно измѣреніе, называемое *длиною*. Въ ящикѣ каждый край простирается только въ одну *длину*.

Можно также получить понятіе объ измѣреніяхъ обративъ вниманіе на то, что уничтожается при переходѣ отъ протяженій къ ихъ предѣламъ. Такимъ образомъ *линія*, укорачиваясь постепенно, и обратясь наконецъ въ точку, теряетъ единственное, очевидное свое измѣреніе, называемое *длиною*. *Поверхность*, чрезъ непрерывное суживаніе, обратится въ линію, и лишится тогда одного измѣренія, обыкновенно называемаго *шириною*; и такъ, *поверхность имѣетъ два измѣренія*. Наконецъ *объёмъ*, чрезъ послѣдовательное утоненіе, или чрезъ уничтоженіе внутренности, при чемъ останется одна оболочка, сдѣлается поверхностію, и потеряетъ измѣреніе, называемое *высотой*; поэтому *объёмъ имѣетъ три измѣренія*.

Преподаватель обратитъ вниманіе учениковъ и на то обстоятельство, что два измѣренія поверхности, или три измѣренія объёма могутъ исчезнуть въ одно время, какъ напримѣръ при разсматриваніи площади круга, а равно поверхности и объёма шара, обращающихся въ точку съ уничтоженіемъ радіуса.

Когда три измѣренія объёма различны между собою, то вообще наибольшее изъ нихъ называется *длиною*, второе по величинѣ *шириною*, третье, наименьшее, *высотой*, *толстотою*

ніяхъ на части. Тамъ же будетъ объяснено, что принявъ линію за одно измѣреніе, алгебраическое выраженіе площади и поверхности будетъ пропорціонально квадрату числа, означающаго линію, а выраженіе объёма, кубу этого числа. Такимъ образомъ число измѣреній, приписываемыхъ тремъ протяженіямъ, вполне оправдается алгебраическими формулами, выражающими ихъ величины.

или *глубиною*. Впрочемъ, эти названія, а равно относительныя величины измѣреній, не всегда свойственны разсматриваемымъ естественнымъ тѣламъ. Такъ говоря о человѣкѣ, мы не скажемъ *высота* его, а скажемъ *ростъ*; подъ *глубиною* колодезя не будемъ разумѣть *наименьшее* его измѣреніе, а напротивъ того, *наибольшее*, потому что глубина колодезя вообще болѣе *длины* и *ширины* его поверхности. Впрочемъ, какъ названія, о которыхъ говоримъ, приняты всѣми, то перемѣнять ихъ не слѣдуетъ, а должно только опредѣлительно условиться въ истинномъ ихъ значеніи. И такъ, *ширина* будетъ означать то измѣреніе, котораго лишается поверхность обращаясь въ линію, а *высота*, измѣреніе, исчезающее при переходѣ объёма къ поверхности.

Измѣдованіе различныхъ свойствъ линій, поверхностей и объёмовъ, а также измѣреніе протяженій, составляютъ предметъ Геометріи. И такъ, *Геометрія есть наука о свойствахъ и измѣреніяхъ различныхъ протяженій*.

По различію трехъ протяженій, Геометрія раздѣляется на три части: 1-е на *Лонгиметрію*, имѣющую предметомъ *линію*; 2-е, *Планиметрію*, занимающуюся *поверхностями*, и 3-е, *Стереометрію*, разсматривающую *объёмы*. Для удобства, мы соединимъ первыя двѣ части въ одну подъ общимъ названіемъ *Геометріи на плоскости*, а третью, съ присовокупленіемъ статьи о взаимномъ положеніи прямыхъ и плоскостей въ пространствѣ, назовемъ *Геометріею въ пространствѣ*. (Общія замѣчанія, № IV).

Примѣчаніе. Нельзя требовать отъ начинающихъ, чтобы они вдругъ, и съ полнымъ сознаніемъ, усвоили себѣ всѣ предложенныя выше понятія, которыя, конечно, покажутся имъ сначала нѣсколько затруднительными. Но, по мѣрѣ дальнѣйшихъ развитій, всё непонятое незамѣтнымъ образомъ объяснится

само собою. Поэтому, излишне было бы настаивать слишком много на этих предварительных понятиях.

Исчислив учащимся предметы, которыми занимается Начальная Геометрія, сообразно съ сказаннымъ въ № IVъ Общихъ Замѣчаній, Преподаватель перейдетъ къ нѣкоторымъ опредѣленіямъ, объясненіямъ и аксіомамъ, придерживаясь слѣдующаго порядка:

Самая простая изъ всѣхъ линій есть *прямая*, о которой всякій имѣетъ ясное понятіе. За очевидныя ея свойства можно принять:

Акс. 1. *Между двумя точками можно провести одну только прямую линію.*

Акс. 2. *Прямая линія есть кратчайшее разстояніе между двумя точками.*

Такого рода истины, сами, по себѣ очевидныя, называются аксіомами.

Тутъ же слѣдуетъ условиться съ учащимися въ томъ, что чрезъ всякія двѣ точки можно всегда провести прямую линію, и продолжить еѣ въ обѣ стороны неопредѣленно.

Акс. 3. *Двѣ прямыя, имѣющія двѣ общія точки, сливаются въ одну линію, какъ бы далеко не были продолжены.*

И такъ, для наложенія одной прямой линіи на другую, достаточно совмѣстить двѣ какія ни есть точки первой съ двумя точками второй.

Предл. 4. *Двѣ пересѣкающіяся прямыя имѣютъ только одну общую точку, называемую точкою пересѣченія.*

Линія, состоящая изъ соединенія прямыхъ линій, называется ломаною.

Всякая линія, не прямая и не ломаная, называется кривою.

Самая простая изъ поверхностей есть *плоская*, или, иначе, *плоскость*. Всякій, безъ объясненія, понимаетъ еѣ. Допуская

же первоначальное понятіе о прямой линіи, можно опредѣлить плоскость слѣдующимъ образомъ:

Плоскость есть поверхность такого свойства, что взявъ на ней двѣ какія ни есть точки, и соединивъ ихъ прямою линією, эта прямая будетъ всегда лежать на ней всѣми своими точками. Опред. 3.

Всякая поверхность не плоская, и не состоящая изъ соединенія плоскостей, называется кривою поверхностью.

Можно вообразить, что плоскость простирается неопредѣленно во всѣ стороны. Но, для бѣльшей ясности, представимъ себѣ, что разсматривается только нѣкоторая ограниченная ея часть. Пусть будутъ А и В двѣ точки, взятыя на этой плоскости; проводимъ чрезъ нихъ прямую линію АВ, которую продолжимъ въ обѣ стороны. Если представимъ себѣ, что плоскость обращается около прямой АВ, какъ около оси, то, по мѣрѣ обращенія своего, она будетъ принимать безчисленное множество различныхъ положеній. Такимъ образомъ двѣ данныя точки А и В, или какое ни есть число точекъ, расположенныхъ по одной прямой АВ, не могутъ опредѣлить положенія плоскости. Но если назначится третья точка С, не находящаяся на прямой АВ, то плоскость, при обращеніи около АВ, встрѣтитъ С, и приметъ совершенно опредѣленное положеніе. Слѣдовательно:

Прямая линія и точка вне этой прямой, опредѣляютъ положеніе плоскости, и при томъ только одной. Предл. 6.

Три точки, не находящаяся на одной прямой линіи, опредѣляютъ положеніе плоскости, и при томъ только одной. Предл. 7.

Двѣ пересѣкающіяся прямыя линіи опредѣляютъ положеніе плоскости, и при томъ только одной. Дѣйствительно, проведемъ плоскость чрезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ и чрезъ двѣ другія точки, изъ которыхъ одна принадлежитъ одной прямой, а другая, другой. Эта плоскость вполне опре-

дѣлится, потому что три взятых точки не находятся на одномъ направленіи. Всякая плоскость, проходящая чрезъ двѣ данныя прямая, сольется съ найденною по той причинѣ, что будетъ заключать упомянутыя сей-часъ три точки.

Другія свойства плоскостей, покажутся не нужныя, отнесены къ Отдѣлу IX.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

ОТДѢЛЪ I.

ОБЪ УГЛАХЪ И ЛІНІЯХЪ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХЪ, НАКЛОННЫХЪ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХЪ.

Такъ какъ въ расположеніи нѣкоторыхъ статей этого Отдѣла отступлено отъ порядка, котораго придерживаются въ болѣе части изданныхъ курсовъ Геометріи, то считаемъ необходимымъ изложить подробно его содержаніе, и указать вмѣстѣ съ тѣмъ на логическую связь между послѣдовательными предметами.

2. О свойствахъ *прямой линіи*, разсматриваемой отдѣльно, всё что нужно было сказано въ *Введеніи*. Теперь, слѣдуя естественному порядку, надлежитъ разсмотрѣть различныя совокупленія *двухъ* прямыхъ на плоскости. И во первыхъ, Преподаватель условится въ томъ, какимъ образомъ *складываются* прямая линіи, а также *вычитаются* одна изъ другой; для этого онъ укажетъ на извѣстное всѣмъ употребленіе *линейки* и *циркуля*, какъ инструмента, служащаго при этомъ дѣйствиіи для нанесенія данной прямолинейной длины по извѣстному направленію. Потомъ, разсматриваніе *двухъ* прямыхъ линій на плоскости, не совмѣщающихся между собою, приведетъ его къ двумъ случаямъ: или прямая, по достаточномъ

ихъ продолженіи, пересѣкутся, или, какъ показано будетъ далѣе (№ 4, *Предл.* 20), не пересѣкутся. Разсмотримъ сперва первый случай.

Пусть будутъ АВ и СD двѣ данныя прямая, а О точка ихъ пересѣченія. Такимъ образомъ получимъ четыре части **ВОD**, **СОА**, **СОВ** и **АОD**, которыя называются *углами*. Фиг. 2.

И такъ, *уголъ есть совокупленіе двухъ прямыхъ линій, встрѣчающихся въ одной точкѣ, и ограниченныхъ при ней*. Опред. 9.

Точка встрѣчи двухъ прямыхъ называется *вершиною* угла, а каждая изъ прямыхъ, ограниченная при вершинѣ, его *стороною* или *бокомъ*.

Уголь означаютъ обыкновенно тремя буквами: двѣ относятся къ сторонамъ угла, а третья, которую ставятъ посрединѣ, къ его вершинѣ. И такъ, уголь съ правой стороны чертежа означается чрезъ **ВОD**, съ лѣвой, чрезъ **СОА**, снизу **АОD**, сверху **ВОС**. Когда имѣемъ только одинъ уголь, то можно изображать его одною буквою, именно тою, которая поставлена при вершинѣ.

Примѣчаніе. Понятіе объ углѣ не требуетъ другаго опредѣленія; называть угломъ *безконечное пространство*, заключающееся между двумя пересѣкающимися прямыми, неестественно, и при томъ совершенно бесполезно, потому что отличительную принадлежность угла составляетъ большая или меньшая степень отклоненія одной его стороны отъ другой, а разсматриваніе пространства, заключающагося между ними, есть предметъ посторонній. И такъ, достаточно показать, что два угла равны, когда, при общей вершинѣ, стороны ихъ имѣютъ по одной общей точкѣ. Отсюда ученикъ ясно увидитъ, что величина угла отнюдь не зависитъ отъ длины его стороны, а единственно отъ относительнаго ихъ положенія.

Послѣ этого надлежитъ показать возможность *сложенія* и *вычитанія* угловъ. Такъ, на примѣръ, подъ суммою угловъ

Фиг. 3. ВАС и В'А'С' должно разумѣть уголъ DOF, полученный чрезъ соединеніе угловъ BOE=BAC и EOF=B'A'C', наблюдая, чтобы сторона OE была общою обоимъ слагаемымъ угламъ. Равнымъ образомъ, чтобъ получить разность двухъ угловъ

Фиг. 4. ВАС—В'А'С', вообразимъ, что составили уголъ D'O'E'=BAC, и нанесли потомъ уголъ D'O'F'=B'A'C', принимая O'D' за одну изъ его сторонъ. Уголъ F'O'E' изобразить искомую разность. Должно замѣтить, что здѣсь, а равно и въ послѣдствіи, всѣ линіи проводятся въ одной и той же плоскости; въ противномъ же случаѣ будетъ сдѣлана оговорка.

Если примемъ какой нибудь уголъ за *единицу*, то легко будетъ вообразить углы *вдвое, втрое, вчетверо* и проч. большіе или меньшіе его, которые поэтому изобразятся соответственно цѣлыми числами 2, 3, 4 и проч. или дробями $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и проч. Основываясь на приведенныхъ примѣрахъ, и не упоминая покаместъ объ отношеніяхъ *ирраціональных* между углами, Преподаватель заключить, что углы могутъ быть выражены числами, и что слѣдовательно надъ ними можно производить тѣ же ариѳметическія дѣйствія, какъ и надъ всякими именованными величинами.

Фиг. 5. Положимъ теперь, что прямая ОС, лежавшая сначала на ОВ, начинаетъ обращаться отъ правой руки къ лѣвой, не выходя изъ плоскости, на которой проведена линія АВ. При этомъ движеніи ОС будетъ постепенно удаляться отъ прямой ОВ, составляя съ нею, въ каждомъ своемъ положеніи, два угла, именно: уголъ ВОС и уголъ СОА. Эти два угла называются *смежными*. Очевидно, что сначала уголъ ВОС будетъ меньше СОА, а потомъ, напротивъ того, ВОС' сдѣлается болѣе С'ОА. Ясно, что должно существовать одно такое промежуточное положеніе ОД движущейся прямой ОС, при которомъ углы ВОД и ДОА равны между собою; каждый изъ этихъ двухъ угловъ называется *прямымъ угломъ*, а линія ОД, въ разсуж-

деніи прямой АВ, *перпендикуляромъ*. Въ такомъ смыслѣ говорятъ, что линія ОД *перпендикулярна* къ АВ, или еще, что ОД есть *перпендикуляръ* къ АВ; и обратно: линія АВ или АО *перпендикулярна* къ ОД. Всякое другое положеніе прямой линіи относительно АВ, какъ напримѣръ ОС или ОС', не совпадающее съ ОД, называется *наклоннымъ*. И такъ, линіи ОС и ОС' суть *наклонныя* въ разсужденіи АВ, и обратно.

Изъ сказаннаго заключаемъ непосредственно, что *изъ всякой точки, взятой на прямой, можно возставить къ ней только одинъ перпендикуляръ*.

Уголъ меньше прямого, называется *острымъ*; таковъ уголъ ВОС на чертежѣ. Уголъ больше прямого, какъ напримѣръ СОА, называютъ *тупымъ*.

Всѣ прямые углы равны между собою.

Предл. 10.

Преподаватель докажетъ это предложеніе обыкновеннымъ образомъ чрезъ наложеніе одного прямого угла на другой, и основываясь при томъ на *Аксиомѣ 3*.

Далѣе, изъ предложенныхъ понятій объ углахъ вообще, и изъ *Предложеній* о равенствѣ прямыхъ угловъ, проистекаютъ разныя *Слѣдствія*, именно:

Сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ.

Сумма всѣхъ угловъ, имѣющихъ общую вершину, и находящихся по одну сторону прямой линіи, равна двумъ прямымъ угламъ.

Сумма всѣхъ угловъ около точки равна четыремъ прямымъ угламъ.

Здѣсь представится случай объяснить учащимся различіе между *прямыми* и *обратными предложеніями*. Когда въ данной теоремѣ принимаютъ за слѣдствіе извѣстное предположеніе, а слѣдствіе за предположеніе, то получаютъ вообще *обратную* теорему въ отношеніи къ первоначальной. Мы говоримъ вообще, потому что не всегда прямое предложеніе влечетъ за

собою справедливость обратного; поэтому обратныя требуютъ особаго доказательства.

Для примѣра возьмемъ приведенное сей-часть предложение: *сумма двухъ смежныхъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ.* Здѣсь *предположеніе* состоитъ въ томъ, что рассматриваемые два угла *смежные*, то есть, что у нихъ одна сторона общая, а другія направлены по одной прямой линіи, но противоположны; *слѣдствіе* теоремы — *равенство двухъ прямымъ угламъ суммы смежныхъ угловъ.* Обратное предположеніе, справедливое въ настоящемъ случаѣ, выразится слѣдующимъ образомъ: *когда сумма двухъ угловъ, имѣющихъ общую сторону, равна двумъ прямымъ, то эти два угла будутъ смежные, то есть, другія ихъ стороны прямопротивоположны.*

Фиг. 6.

Пусть данные углы будутъ $\angle DOC$ и $\angle COA$, а OC общая ихъ сторона. Продолжимъ линію AO до B . Если не допустимъ, что сторона OD прямопротивоположна сторонѣ OA , то она не совпадетъ съ линіею OB , и слѣдовательно составитъ съ нею нѣкоторый уголъ $\angle DOB$. Но, по самому предположенію,

$$\text{уголъ } \angle DOC + \text{уголъ } \angle COA = 2 \text{ прямыхъ},$$

и какъ съ другой стороны сумма двухъ смежныхъ угловъ $\angle BOC$ и $\angle COA$ равняется *двумъ прямымъ*, то и получимъ

$$\text{уголъ } \angle DOC = \text{углу } \angle BOC.$$

Это равенство очевидно противорѣчитъ построенію, по которому уголъ $\angle DOC >$ угла $\angle BOC$; слѣдовательно, нельзя допустить, чтобы внѣшняя сторона OD угла $\angle DOC$ падала ниже OB . Совершенно подобнымъ образомъ докажется, что внѣшняя сторона одного изъ рассматриваемыхъ угловъ не можетъ имѣть положеніе OD' , то есть падать выше OB . Дѣйствительно, въ этомъ предположеніи нашли бы, какъ и выше, уголъ $\angle D'OC =$ углу $\angle BOC$, а изъ построенія вышло бы уголъ $\angle D'OC <$ угла $\angle BOC$. На основаніи такихъ противорѣчій заключаемъ о справедливости приведеннаго выше обратнаго предположенія.

Преподаватель замѣтитъ учащимся, что употребленное доказательство основано на *способѣ приведенія къ противорѣчію*. При дальнѣйшихъ же объясненіяхъ онъ будетъ сообразоваться съ тѣмъ, что сказано объ этомъ способѣ въ Общихъ Замѣчаніяхъ (№ VII).

Углы, происходящіе отъ пересѣченія двухъ прямыхъ линій, и обращенные вершинами въ противныя стороны, называются *противоположными углами*. И такъ, углы $\angle AOB$ и $\angle DOC$ *противоположные*, а равно $\angle AOC$ и $\angle BOD$. Фиг. 7.

Противоположные углы равны между собою. Въ самомъ дѣлѣ, сумма двухъ смежныхъ угловъ $\angle AOB$ и $\angle BOD$ равна двумъ прямымъ, почему

$$\text{уголъ } \angle AOB = 2 \text{ прямыхъ} - \text{уголъ } \angle BOD;$$

сумма $\angle BOD$ и $\angle DOC$, по той же причинѣ, равна двумъ прямымъ, почему

$$\text{уголъ } \angle DOC = 2 \text{ прямыхъ} - \text{уголъ } \angle BOD.$$

Слѣдовательно углы $\angle AOB$ и $\angle DOC$ равны между собою.

3. Уже видѣли выше, что изъ точки, взятой на прямой линіи, можно всегда возставить къ ней перпендикуляръ, и при томъ только одинъ въ одной и той же плоскости. Теперь докажемъ, что *изъ всякой точки, внѣ прямой, можно всегда опустить на нее перпендикуляръ, и при томъ только одинъ.*

Фиг. 8.

Пусть данная прямая будетъ AB , а данная точка C . Такъ какъ неопредѣленная прямая AB раздѣляетъ плоскость, проходящую чрезъ нее и чрезъ точку C на двѣ части, то обращая верхнюю часть L около AB до ея совпаденія съ нижнею M , точка C приметъ на M нѣкоторое положеніе, означенное буквою C' на чертежѣ. Если теперь, при первоначальномъ положеніи точки C , соединимъ ея съ C' , то получимъ прямую CC' , которая пересѣчетъ линію AB , положимъ въ точкѣ O . Легко видѣть, что углы $\angle AOC$ и $\angle AOC'$ будутъ оба прямые; дѣйствительно, если вновь перегнемъ плоскость по линіи AB ,

то прямая АО останется неподвижною, а СО совмѣстится съ ОС', изъ чего и слѣдуетъ заключить, что уголъ АОС равенъ углу АОС', и какъ они смежные, то каждый изъ нихъ будетъ прямымъ. И такъ, линия СО перпендикулярна къ АВ.

Теперь надобно доказать, что кромѣ перпендикуляра СО, другого нельзя опустить изъ С на линію АВ. Положимъ, противно сказанному, что CD перпендикулярна также къ АВ, и слѣдовательно уголъ ADC прямой. Перегнувъ часть плоскости L по АВ до ея совпаденія съ М, прямая CD совмѣстится съ C'D, почему уголъ ADC', какъ равный углу ADC, будетъ прямой; и такъ, линія CDC' будетъ прямая, откуда слѣдовало бы заключить, что чрезъ двѣ точки С и С' проходятъ двѣ различныя прямыя СОС' и CDC'; невозможность этого слѣдствія (Акс. 1) влечетъ за собою справедливость второй части доказываемаго предложенія.

И такъ, кромѣ перпендикуляра СО, другого быть не можетъ, и всѣ прямыя, подобныя CD, CE и проч. будутъ наклонныя.

Линія CC', какъ прямая, меньше ломаной CDC'; сверхъ того $CO = \frac{1}{2} CC'$, а $CD = \frac{1}{2} CDC'$; отсюда заключаемъ, что $CO < CD$. Слѣдовательно

Предл. 11. *Перпендикуляръ, опущенный изъ данной точки на какую ни есть прямую линію, короче всякой наклонной.*

Этотъ перпендикуляръ, или кратчайшій путь отъ точки къ прямой, условились называть *разстояніемъ* точки отъ прямой.

Предл. 12. *Наклонная линія составляетъ острые углы съ обоими перпендикулярами.*

Въ самомъ дѣлѣ, если бы допустили, что уголъ CDA (тотъ же чертежъ) тупой (случай прямого угла исключается уже тѣмъ, что сказано выше), то проведя линію DM перпендикулярно къ АВ; она необходимо помѣстилась бы въ уголъ CDO, и поэтому встрѣтила бы СО въ нѣкоторой точкѣ, напримѣръ

въ М; такимъ образомъ чрезъ точку М прошли бы два перпендикуляра къ прямой АВ, что невозможно.

Изъ двухъ наклонныхъ линій та длиннѣе, которая болѣе удалена отъ основанія перпендикуляра; при равномъ удаленіи, двѣ наклонныя равны между собою. Предл. 13.

Пусть будутъ CD ближайшая и CE дальнѣйшая наклонная къ АВ. Соединивъ D и E съ точкою С', получимъ внутреннюю ломаную CDC' и наружную ломаную CEC'. Продолживъ сторону C'D до F, найдется, на основаніи Акс. 2,

$$CF + FD > CD$$

$$FE + EC' > FD + DC'.$$

Сложивъ эти два неравенства, уничтоживъ потомъ FD, и замѣнивъ сумму CF + FE линією CE, получимъ окончательно

$$CE + EC' > CD + DC'.$$

Это неравенство показываетъ, что если между двумя точками проведены двѣ ломаныя линіи, состоящія каждая изъ двухъ прямыхъ, то наружная ломаная линія будетъ болѣе внутренней. Предл. 14.

Принявъ въ соображеніе, что $EC' = CE$, $DC' = CD$, и раздѣливъ предыдущія неравенства на 2, найдемъ

$$CE > CD,$$

что и слѣдовало доказать.

Наклонныя, проведенныя изъ одной точки перпендикуляра, и равно удаленныя отъ него, равны между собою, и составляютъ съ нимъ равные углы. Предл. 15.

Пусть СО перпендикулярна къ АВ; такъ какъ по предположенію разстоянія АО и ОВ наклонныхъ АС и СВ равны между собою, то обративъ около СО часть плоскости L до совмѣщенія ея съ М, точка С останется неподвижною, а В сольется съ А; слѣдовательно, прямая СВ совпадетъ съ СА, а уголъ BCO, покрывъ совершенно уголъ ACO, будетъ ему равенъ, что и имѣли въ виду доказать. Фиг. 9.

Предл. 16. *Изъ двухъ наклонныхъ, проведенныхъ чрезъ одну точку перпендикуляра, болѣе удаленная составляетъ меньшій уголъ съ другимъ перпендикуляромъ.*

Фиг. 10. Пусть будетъ CO перпендикуляръ къ AB , CA ближайшая, а CD дальнѣйшая наклонная; отложимъ $OB=OA$, и соединимъ C съ B ; уголъ CBA будетъ равенъ углу CAO (Предл. 15). Положимъ теперь, что линія DB раздѣлена пополамъ въ точкѣ E , и что изъ E возставленъ перпендикуляръ, который необходимо пересѣчетъ прямую DC , на примѣръ въ F ; дѣйствительно, такъ какъ точка дѣленія E не можетъ находиться между O и B , ибо $OB < \frac{1}{2}DB$, то непременно упадетъ между O и D . Соединивъ F съ B , получатся двѣ наклонныя FD и FB , равныя между собой, при чемъ уголъ FBE будетъ равенъ углу FDE . Но уголъ $CBE >$ угла FBE ; слѣдовательно, сообразно съ сказаннымъ, получится уголъ $CDO <$ угла CAO .

Изъ сказаннаго выше о перпендикулярахъ и наклонныхъ выводятся очень просто нѣкоторыя слѣдствія, именно:

Слѣдст. 17. *Изъ одной точки нельзя провести къ данной прямой болѣе двухъ равныхъ линій.*

Слѣдст. 18. *Перпендикуляръ, возставленный изъ середины прямой линіи, проходитъ чрезъ всѣ точки, находящіяся на равныхъ разстояніяхъ отъ двухъ концовъ данной прямой.*

Слѣдст. 19. *Всякая точка, взятая не на этомъ перпендикулярѣ, падаетъ на неравныхъ разстояніяхъ отъ концовъ данной прямой.*

Слѣдуетъ также разсмотрѣть и предложенія, обратныя предыдущимъ.

Предл. 20. *4. Два перпендикуляра къ одной и той же линіи, какъ бы далеко не были продолжены въ обѣ стороны, никогда не пересѣкутся.*

Фиг. 11. Дѣйствительно, если допустимъ, что перпендикуляры DE и FG къ AB пересѣкаются, на примѣръ въ точкѣ C , то отсюда

слѣдовало бы заключить, что изъ этой точки C можно опустить два перпендикуляра на линію AB , что невозможно. Совокупленіе трехъ линій $DOO'F$ или $EOO'G$ называется прямоугольнымъ двуугольникомъ.

Когда двѣ прямыя пересѣчены третьей, и сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону съкущей, равна двумъ прямымъ угламъ, то эти двѣ линіи нигдѣ не пересѣкутся. Предл. 21.

Пусть будутъ AB и CD двѣ данныя прямыя, а EF пересѣкающая ихъ линія при условіи $a+b=2$ прямыхъ. Если примемъ, что линіи AB и CD пересѣкаются, то опустимъ изъ точки пересѣченія перпендикуляръ HG на EF ; далѣе, замѣтивъ, что уголъ DCF равенъ углу BAF , окажется, что двѣ наклонныя BA и DC , по одну сторону перпендикуляра HG , составляютъ съ другимъ перпендикуляромъ EF равные острые углы DCF и BAF . Невозможность этого слѣдствія (Предл. 16) ведетъ прямо къ заключенію, что линіи AB и CD нигдѣ не пересѣкутся. Замѣтимъ, что совокупленіе трехъ линій $BACD$, когда AB и CD не встрѣчаются, называется косоугольнымъ двуугольникомъ. Фиг. 12.

Параллельными линіями называются прямыя, находящіяся въ одной плоскости, и нигдѣ не встрѣчающіяся. Опред. 22.

Слѣдовательно, два перпендикуляра къ одной прямой, а также двѣ линіи, составляющія съ третьей внутренніе углы, которыхъ сумма равна двумъ прямымъ, суть линіи параллельныя.

Наклонная и перпендикуляръ къ одной и той же прямой линіи, по достаточномъ ихъ продолженіи, всегда пересѣкутся. Акс. 23.

Изъ этой аксіомы, о которой будутъ предложены нѣкоторыя подробности въ концѣ этого Отдѣла, проистекаетъ слѣдующее предложеніе:

Чрезъ данную точку можно провести только одну линію, параллельную данной прямой. Предл. 24

Дѣйствительно, опустивъ изъ данной точки O перпендику-

ляръ OO' на данную прямую GF , и возставивъ потомъ перпендикулярную OD къ OO' , окажется, что всякая линия, отличная отъ OD , какъ напримѣръ OH , будетъ наклонною къ $O'F$, почему и пересѣчетъ гдѣ нибудь перпендикуляръ $O'F$ или продолженіе его $O'G$.

Предл. 23. Когда двѣ прямыя пересѣчены третьею, и сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону съкущей, не равна двумъ прямымъ угламъ, то двѣ линіи пересѣкаются.

Фиг. 12. Собственно въ этомъ предложеніи состоитъ 11-я Эвклидова аксіома. Для доказательства, пусть будутъ AB и CK данныя двѣ прямыя, а EF съкущая; положимъ, что сумма угловъ BAF и KCE менѣе двухъ прямыхъ. Такъ какъ изъ точки C можно провести одну только параллельную, напримѣръ CD , къ AB , то заключаемъ, что CK не будетъ параллельна линіи AB , и слѣдовательно пересѣчетъ её.

Когда двѣ параллельныя линіи пересѣчены косвенно третьею прямою, то изъ осьми угловъ, образуемыхъ при этомъ, 1-е четыре острые будутъ равны между собою; 2-е четыре тупые также равны, и 3-е каждый острый будетъ служить тупому дополненіемъ къ двумъ прямымъ угламъ.

Эти свойства суть непосредственныя слѣдствія Предл. 21.

Фиг. 13. Упоминаемымъ осьми угламъ, сравниваемымъ между собою относительно ихъ положенія, даны различныя названія. Такъ углы c, d, e, f , заключающіеся между двумя параллельными, (или непараллельными линіями), называются внутренними, а углы a, b, g, h внешними. Углы c и f , а также d и e внутренними противоположными или внутренними перекрестными; углы a и h , а также b и g внешними противоположными или внешними перекрестными. Два угла, одинъ внутренний, а другой внѣшній, обращенные своими отверстиями въ одну сторону, называются соответственными. Таковы a и e , c и g , b и f , d и h .

Въ слѣдствіе приведеннаго сей-часъ предложенія заключаемъ, что при пересѣченіи двухъ параллельныхъ линій третьею прямою

1-е. Внутренніе противоположные углы равны между собою.

2-е. Внешніе противоположные углы равны.

3-е. Соответственные углы равны.

4-е. Сумма внутреннихъ угловъ, по одну сторону съкущей, равна двумъ прямымъ угламъ. Предл. 26.

5-е. Сумма внешнихъ угловъ, по одну сторону съкущей, равна двумъ прямымъ угламъ.

Вслѣдъ за этимъ должно доказать и обратныя предложенія, именно: если, при пересѣченіи двухъ прямыхъ третьею, одно изъ приведенныхъ пяти свойствъ имѣетъ мѣсто, то данныя двѣ прямыя взаимно параллельны.

5. Линіи, параллельныя одной прямой, параллельны между собою. Предл. 27.

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ онѣ встрѣчались, то изъ одной точки можно бы было провести двѣ параллельныя къ одной и той же прямой.

Два угла, имѣющіе стороны взаимно параллельныя или перпендикулярныя, будутъ или равны между собою, или, взятыя вмѣстѣ, составятъ два прямые угла. Предл. 28.

Различные случаи этого предложенія докажутся очень просто на основаніи приведенныхъ сей-часъ теоремъ 26.

Части двухъ параллельныхъ линій, заключающіяся между двумя другими параллельными, равны между собою. Предл. 29.

Фиг. 14. Положимъ, что параллельныя линіи CD и $C'D'$ пересѣчены двумя прямыми AB и $A'B'$, также взаимно параллельными; требуется доказать, что $A'B' = AB$. Соединивъ A' съ B , получимъ два двуугольника $CA'BC'$ или L и $D'BA'D$ или M , которые равны между собою; дѣйствительно, такъ какъ уголъ $CA'B = \text{уг. } D'BA'$, а $\text{уг. } C'BA' = \text{уг. } DA'B$ (Предл. 26), то совмѣстивъ точку A' съ B , а прямую $A'C$ съ BD' , другія

двѣ стороны $A'B$ и BC' двугульника L совмѣстятся съ сторонами BA' и $A'D$ двугульника M . То же самое должно разумѣть и о линіяхъ BA и $A'B'$, потому что по наложеніи L на M , по причинѣ равенства угловъ ABA' и $B'A'B$, прямая AB пойдетъ по направленію $A'B$; съ другой же стороны, такъ какъ крайнія точки B и A прямой BA упадутъ соответственно въ точки A' и B' прямой $A'B'$, то и заключаемъ, что $A'B = AB$.

Отсюда непосредственно проистекаетъ слѣдствіе:

Слѣдст. 30. *Разстоянія между двумя параллельными линіями вездѣ равны между собою.*

ПРИМѢЧАНІЕ КЪ ТЕОРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХЪ ЛИНІЙ.

Предложеніе 23, принадлежащее къ числу многихъ, которыя могутъ быть приняты за основаніе теоріи параллельныхъ линій, Преподаватель приведетъ въ видѣ аксіомы. По неудовлетворительности вообще предлагаемыхъ доказательствъ этой истины, всего лучше, при элементарномъ изложеніи, поступить какъ *Эвклидъ*, и принять ее за очевидную (Общія Замѣчанія № IV). Впрочемъ, для поясненія упоминаемаго предмета Преподавателямъ, отсылаемъ ихъ къ отдѣльнымъ трудамъ математиковъ, и между прочимъ къ Мемуару Лежандра, о которомъ упомянуто въ Общихъ Замѣчаніяхъ № IX . Приводимъ также нѣкоторые собственные соображенія по этому самому вопросу.

Пусть будетъ AD наклонная, а BC перпендикуляръ къ AE . Слѣдуетъ доказать, что AD пересѣчется съ BC по достаточномъ продолженіи обѣихъ прямыхъ. Покажемъ, что допустить противное, мы будемъ приведены къ явной невозможности. Если, удаляясь отъ точки A , станемъ опускать изъ m , m' , m'' ... на прямую AB перпендикуляры mr , $m'r'$, $m''r''$..., которые очевидно не могутъ падать въ A , то можетъ случиться одно изъ двухъ: или основанія r , r' , r'' ... перпендикуляровъ будутъ неопредѣленно удаляться отъ вершины A угла, или же будутъ постепенно приближаться къ нѣкоторой точкѣ O , никогда не достигая ея, и слѣдовательно не

переходя за указанную точку. Первый случай ведетъ непосредственно къ заключенію, что всякая наклонная пересѣкается съ перпендикуляромъ. Поэтому мы должны разсмотрѣть второй случай, то есть существованіе предѣльной точки O , и слѣдовательно предѣльной прямой линіи AO , длина которой опредѣляется угломъ EAD . Но мы покажемъ, что такой зависимости опредѣленной длины отъ прямолинейнаго угла допустить невозможно. Для этого замѣтимъ во первыхъ, что уголъ EAD вполне опредѣляется тремя понятіями, именно: понятіемъ о прямой линіи, о плоскости и объ отвлеченномъ числѣ. Дѣйствительно, уголъ EAD , какой бы онъ ни былъ, составитъ нѣкоторую опредѣленную часть прямого угла EAF , построеннаго въ плоскости EAD ; такъ, напримѣръ, онъ будетъ равенъ $\frac{2}{3}$ прямого, и слѣдовательно, во всякомъ случаѣ, опредѣлится отвлеченнымъ числомъ. По данному же отвлеченному числу, о которомъ говоримъ, и понятіи о прямой линіи для проведенія сторонъ угла EAD , этотъ уголъ опредѣлится вполне. И такъ, длина AO должна, такъ сказать, получить происхожденіе изъ трехъ понятій: 1-е неопредѣленной прямой, 2-е неопредѣленной плоскости и 3-е отвлеченнаго числа. Но какъ ни одно изъ этихъ трехъ понятій не заключаетъ въ себѣ никакого элемента, однороднаго съ именованною длиною, то и заключаемъ, что предѣльная линія AO существовать не можетъ, и что слѣдовательно наклонная AD пересѣчетъ всякій перпендикуляръ BC , какъ бы основаніе B не было удалено отъ точки A .

Чтобы убѣдиться въ строгости приведеннаго доказательства, стоитъ только принять въ соображеніе, что основаніемъ его служитъ то свойство прямой линіи (а равно и плоскости), по которому она независима отъ всякаго параметра или опредѣленной линейной мѣры. Дѣйствительно, всѣ прямыя, по наложеніи одной на другую, совпадаютъ во всѣхъ своихъ точкахъ, и поэтому тождественны между собою. Напротивъ того, всякая кривая линія (а равно кривая поверхность) не можетъ быть построена безъ какого либо параметра или опредѣленной линейной мѣры. Такъ размѣръ круга зависитъ отъ его радиуса, параболы, отъ ея параметра и проч. Чтобы заключеніе наше сдѣлать такъ сказать осязательнымъ относительно этого характеристическаго различія между прямыми и кривыми линіями, вообразимъ, что нѣсколько человѣкъ, независимо одинъ отъ

другого, провели каждый прямую линию и начертили кругъ. Всѣ прямыя линіи *совпадаютъ* по наложеніи одной на другую, потому что ихъ черченіе не зависило ни отъ какой линейной мѣры. Что же касается до круговъ, то, совмѣстивъ ихъ центры, окажется, что всѣ эти круги различны по причинѣ произвольнаго выбора линейной мѣры, въ настоящемъ случаѣ *радіусовъ* круговъ.

Предложенное здѣсь различіе между прямою и кривыми линіями можетъ быть еще разсматриваемо въ слѣдующемъ видѣ: *прямая есть такая линія, на которой не существуетъ совокупности двухъ точекъ (даже одной), отличающихся отъ другихъ точекъ какою либо особенностію.* Это свойство, совершенно согласное съ нашими первоначальными понятіями о прямой, собственно говоря, не отличается отъ предложеннаго выше, въ отношеніи къ параметру; дѣйствительно, если бы на прямой линіи могли существовать хотя двѣ особенныя точки, то разстояніе между ними опредѣлило бы нѣкоторую *длину* или *параметръ*. Въ кривыхъ линіяхъ, напротивъ того, существуетъ безчисленное множество совокупленій двухъ или нѣсколькихъ точекъ, отличающихся какою либо особенностію; такъ, напримѣръ, въ кругѣ усматриваемъ безчисленное множество паръ точекъ, находящихся одна отъ другой на разстояніи цѣлаго *діаметра*. Подобное должно разумѣть и о всякой другой кривой линіи.

Докажемъ еще на основаніи приведенныхъ началъ, что *двѣ прямыя, имѣющія двѣ общія точки, совпадаютъ во всемъ своемъ протяженіи.* Доказательство этой истины, обыкновенно предлагаемое въ курсахъ, подаютъ поводъ къ справедливымъ возраженіямъ. И во первыхъ, оно основано на теоремѣ о *равенствѣ прямыхъ угловъ*, а это предложеніе, какъ намъ кажется, не можетъ быть строго оправдано, не допустивъ самой истины, которую имѣемъ въ виду доказать. Съ другой стороны, въ доказательствахъ опускаютъ, безъ разсмотрѣнія, невозможность *безконечно-малыхъ прямолинейныхъ угловъ*. Войдемъ по этому предмету въ нѣкоторыя подробности, и приведемъ, для соображенія, изложеніе занимающей насъ истины, занимствуя его у *Лександра*.

«Пусть общія точки будутъ А и В; прежде всего замѣтимъ, что двѣ прямыя между А и В сливаются въ одну, иначе между двумя точками проходили бы двѣ прямыя линіи, что

Фиг. 16.

невозможно въ силу *Аксиомы 1.* Положимъ теперь, что двѣ разсматриваемыя линіи, по продолженіи ихъ, начинаютъ расходиться въ точкѣ С, такъ что одна изъ нихъ идетъ по СD, а другая по СЕ. Въ точкѣ С проводимъ СF такъ, чтобы уголъ АСF былъ прямой. Но линія АСD прямая; слѣдовательно уголъ FCD будетъ прямой; также линія АСЕ прямая, почему и уголъ FCE прямой. Съ другой же стороны часть FCE не можетъ быть равна цѣлому FCD; отсюда заключаемъ, что когда прямыя имѣютъ двѣ общія точки А и В, то онѣ не могутъ разъединиться ни въ какой точкѣ, а поэтому совмѣщаются во всемъ своемъ протяженіи.»

Это доказательство, какъ уже сказано выше, основано на теоремѣ о *равенствѣ прямыхъ угловъ*; сверхъ того въ немъ предполагается, что уголъ DCE есть *конечный*. Но, при строгомъ возвращеніи на предметъ, не слѣдовало бы предупредить возраженіе, что этотъ уголъ DCE можетъ быть *безконечно-малымъ*, подобно углу, составляемому касательною съ кривою линіею. И дѣйствительно, на какомъ основаніи допускаемъ мы, что двѣ прямыя, въ общей имъ точкѣ, не могутъ находиться точно въ такихъ же обстоятельствахъ, одна въ разсужденіи другой, какъ двѣ кривыя линіи, или какъ кривая и прямая, взаимно-касательныя? Чѣмъ отличаемъ мы, въ нашихъ заключеніяхъ, прямую СЕ отъ частей кривыхъ, каковы напримѣръ СG или СG', которыя имѣли бы въ точкѣ С касательную СD? Вотъ вопросы, которые, безъ сомнѣнія, мы имѣемъ право предложить себѣ. Поэтому намъ и кажется, что обыкновенныя доказательства приводимой теоремы не совсѣмъ удовлетворительны со стороны строгости.

Руководствуясь предложеннымъ выше понятіемъ о свойствѣ прямой линіи, по которому она не можетъ опредѣлять *именованной длины*, мы въ состояніи доказать строгимъ образомъ предложеніе, о которомъ идетъ рѣчь. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ АВ и DE двѣ прямыя, пересѣкающіяся въ точкѣ С. Положимъ, что прямую DE, обращающую около точки С, отвели въ прежней ея плоскости такъ, что она получила положеніе D'E'. При переходѣ могло случиться одно изъ двухъ: или она совмѣстилась съ АВ, или не совмѣстилась. Первое предположеніе ведетъ прямо къ заключенію о справедливости теоремы, и поэтому нечего на немъ и останавливаться. Во второмъ предположеніи должно допустить существованіе нѣ-

Фиг. 17.

которыхъ точекъ F, G... F', G'..., общихъ обѣимъ прямымъ АВ и DE. Но это невозможно, потому что тогда бы двѣ прямыя АВ и DE, противно сказанному, опредѣлили именованную длину, напримѣръ CF, предполагая, что точка F есть ближайшая къ C. Слѣдовательно, двѣ прямыя могутъ имѣть или только одну общую точку, или всю.

Фиг. 18. Окончимъ эти соображенія, приложивъ ихъ еще къ другой, также основной теоріи Геометріи, именно къ свойствамъ пропорціональныхъ линий. Положимъ, что данъ уголъ BAC = α ; сверхъ того допустимъ, что имѣемъ еще другой уголъ EDF = β съ условіемъ, что сумма $\alpha + \beta$ менѣе двухъ прямыхъ угловъ. Если, чрезъ произвольныя точки p, p', p''... прямой АВ, проведемъ линіи pm, p'm', p''m'... такъ, чтобы углы A p m, A p'm', A p''m'... были равны β , то эти прямыя pm, p'm', p''m'... непремѣнно пересѣкутъ AC въ силу Евклидовой 11 аксіомы, которая сама есть слѣдствіе доказаннаго выше предположенія о пересѣченіи наклонной съ перпендикуляромъ. Разсмотримъ теперь отношенія:

$$\frac{Ap}{pm}, \frac{Ap'}{p'm'}, \frac{Ap''}{p''m'} \dots;$$

можетъ случиться одно изъ двухъ: или всѣ эти отношенія будутъ равны между собою, или между ними найдутся по крайней мѣрѣ два различныя. Первое предположеніе приводитъ къ теоріи пропорціональныхъ линій, которая слѣдовательно будетъ доказана, если покажемъ, что второе предположеніе невозможно. Допустимъ же, что два изъ приведенныхъ отношеній, напримѣръ $\frac{Ap}{pm}$ и $\frac{Ap'}{p'm'}$, различны между собою; тогда получимъ

$$\frac{Ap}{pm} = \frac{Ap'}{p'm'} \pm \delta$$

разумѣя подъ δ число отвлеченное, отличное отъ нуля. Если бы это равенство, при величинѣ δ данной напередъ, и выбранной надлежащимъ образомъ, могло состояться нѣсколько разъ, то есть для нѣсколькихъ системъ параллельныхъ линій, каковы pm, p'm', p''m'..., то мы приняли бы pm и p'm' за первую изъ этихъ системъ, именно за ту, для которой pm и p'm' наиблизе отстоятъ отъ точки A. И такъ, въ допущенномъ предположеніи, данныя нашего вопроса, то есть два прямолинейные угла α и β съ отвлеченнымъ числомъ δ , опредѣлили бы нѣкоторую длину Ap, чего быть не можетъ. Отсюда должно заключить,

что второе предположеніе невозможно, и что слѣдовательно всѣ отношенія

$$\frac{Ap}{pm}, \frac{Ap'}{p'm'}, \frac{Ap''}{p''m'} \dots$$

равны между собою, въ чемъ и состоитъ отличительное свойство пропорціональныхъ линій. Предложенное доказательство этой теоріи имѣетъ ту выгоду, что равно приличествуетъ какъ случаю соизмѣримыхъ, такъ и несоизмѣримыхъ линій между собой.

Желающихъ ближе ознакомиться съ соображеніями этого рода, отсылаемъ къ нашимъ Разсужденіямъ: *Considérations sur les démonstrations principales de la théorie des parallèles* и *Nouvelle théorie des parallèles* (Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, VI Série, Sc. Mathématiques et Physiques, T. IV), также къ запискѣ: *Note sur la théorie des parallèles et sur d'autres points fondamentaux de la Géométrie élémentaire* (Bulletin phys.-mathém. T. IX, № 4).

ОТДѢЛЪ II.

Прямолинейныя фигуры и измѣреніе прямыхъ линій.

6. Изложивъ свойства пересѣкающихся и параллельныхъ линій, Преподаватель перейдетъ къ совокупленіямъ на плоскости нѣсколькихъ прямыхъ, ограничивающихъ нѣкоторое пространство. Замѣтивъ, что для полученія ограниченного или сомкнутого пространства необходимо имѣть не менѣе трехъ прямыхъ линій, онъ предложитъ понятіе о треугольникѣ, какъ о простѣйшей сомкнутой фигурѣ. *Треугольникъ* можно опредѣлить *совокупленіемъ трехъ пересѣкающихся прямыхъ, ограниченныхъ при точкахъ встрѣчи* (*). Далѣе слѣдуетъ объ-

(*) Мы опредѣлили треугольникъ не частію плоскости, ограниченной тремя прямыми линіями, чтобы не вводить безъ всякой надобности понятія о площадяхъ въ изслѣдованія, относящіяся единственно къ взаимному положенію прямыхъ. То же самое должно разумѣть и о многоугольникахъ вообще.

яснить смысл названий: *сторона* или *бокъ*, *основаніе*, *высота*, *вершина*, *углы*, и указать на *шесть* составных элементов или частей всякаго треугольника. За симъ уже Преподаватель приступить къ разсмотрѣнію треугольниковъ, 1-е, въ отношеніи ихъ сторонъ, 2-е, въ отношеніи угловъ и 3-е, относительно взаимнаго вліянія сторонъ на углы.

ТРЕУГОЛЬНИКИ, РАЗСМАТРИВАЕМЫЕ ВЪ ОТНОШЕНІИ ИХЪ СТОРОНЪ.

Каждая сторона треугольника меньше суммы двухъ другихъ ()*.

Этому условію удовлетворяетъ треугольникъ, имѣющій всѣ три стороны равныя, который поэтому и называется *равностороннимъ*. Когда двѣ стороны треугольника равны, и каждая изъ нихъ болѣе половины третьей, то условіе также удовлетворяется; такой треугольникъ называется *равнобедреннымъ*. Наконецъ, когда всѣ три стороны различны между собою, то треугольникъ называется *разностороннимъ*.

Предл. 31. *Сумма разстояній всякой точки, взятой внутри треугольника, отъ концовъ какой ни есть стороны, меньше суммы двухъ прочихъ его сторонъ.* (Смол. Предл. 14).

ТРЕУГОЛЬНИКИ, РАЗСМАТРИВАЕМЫЕ ВЪ ОТНОШЕНІИ ИХЪ УГЛОВЪ.

Предл. 32. *Сумма трехъ угловъ треугольника равна двумъ прямымъ угламъ.*

(*) Обратное предложеніе, именно, что *три прямыхъ, изъ которыхъ каждая меньше суммы остальныхъ двухъ, могутъ всегда составить треугольникъ*, доказывается на основаніи свойствъ круга.

Можно предложить первое изъ доказательствъ, помѣщенныхъ въ *Общихъ Замѣчаніяхъ* (№ VII).

Слѣдствіе. *Когда два угла треугольника даны, то третій опредѣлится, отнявъ сумму ихъ отъ двухъ прямыхъ угловъ.*

Раздѣленіе треугольниковъ на *прямоугольные*, *остроугольные* и *тупоугольные*.

Объясненіе названій *гипотенуза* и *катеты*. *Внутренніе и внешніе углы треугольника.*

Сумма внешнихъ угловъ треугольника равна четыремъ прямымъ.

ТРЕУГОЛЬНИКИ, РАЗСМАТРИВАЕМЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЗАИМНАГО ВЛІЯНІЯ СТОРОНЪ НА УГЛЫ.

Равнымъ сторонамъ треугольника противолежатъ равные углы, а болѣеюй сторонъ противолежитъ болѣеюй уголъ. И обратно: равнымъ угламъ противолежатъ равныя стороны, а болѣеюму углу противолежитъ болѣеюя сторона. Предл. 33.

Эти свойства треугольниковъ слѣдуютъ непосредственно изъ предложеній 15 и 16.

Слѣдствія, проистекающія изъ предложенія 33 въ отношеніи къ треугольникамъ: *равностороннимъ*, *равнобедреннымъ*, *прямоугольнымъ*, *разностороннимъ* и *тупоугольнымъ*.

За симъ слѣдуетъ перейти къ разсмотрѣнію случаевъ, въ которыхъ треугольникъ опредѣляется совершенно. И во первыхъ, Преподаватель замѣтитъ, основываясь на способѣ наложенія, что когда всѣ шесть элементовъ одного треугольника соответственно равны шести элементамъ другаго, то два треугольника равны между собою. Послѣ того онъ покажетъ, что при удовлетвореніи нѣкоторыхъ изъ этихъ условій, другія сами собой выполняются, и что вообще равенство трехъ изъ

этихъ шести частей, влечетъ за собою и равенство трехъ остальныхъ. Вотъ порядокъ, въ которомъ разборъ различныхъ случаевъ можетъ быть представленъ:

Предл. 34. *Треугольникъ определяется тремя сторонами.*

Предл. 35. *Треугольникъ определяется двумя сторонами и угломъ, между ними заключающимся.*

Предл. 36. *Треугольникъ определяется одною стороною и прилежащими къ ней двумя углами.*

Предл. 37. *Двѣ стороны и лежащій противъ меньшей стороны уголъ определяютъ два различные треугольника.*

Приводимъ доказательства этихъ четырехъ предложений.

Фиг. 19. Предложение 34. Пусть данный треугольникъ будетъ ABC ; требуется доказать, что по тремъ его сторонамъ AB , AC и BC , нельзя построить другаго треугольника ABC' , отличнаго отъ ABC . Показавъ обыкновеннымъ образомъ, что точка C' не можетъ находиться ни на сторонѣ BC , между B и C , ни внутри треугольника ABC , разсуждаемъ слѣдующимъ образомъ: соединивъ C съ C' прямою CC' , получатся два равнобедренные треугольника CAC' и CBC' , въ которыхъ $AC' = AC$ и $BC' = BC$; въ силу же предложенья 15, будетъ

$$\text{уг. } ACC' = \text{уг. } AC'C, \text{ уг. } BCC' = \text{уг. } BC'C;$$

но какъ $\text{уг. } ACC' > \text{уг. } BCC'$, то и найдется

$$\text{уг. } AC'C > \text{уг. } BC'C,$$

что невозможно. Отсюда заключаемъ, что точка C' должна совпадать съ C , ибо она не можетъ находиться ни на прямой BC , между B и C , ни внутри, ни внѣ треугольника ABC . И такъ, прямая AC' совмѣстится съ AC , а BC' съ BC , почему всѣ шесть элементовъ треугольника ABC' будутъ соответственно равны шести элементамъ треугольника ABC .

Фиг. 20. Предложение 35. Пусть будетъ ABC треугольникъ, въ которомъ даны двѣ стороны AB , AC и уголъ BAC . Провожу $CB' = AB$ подъ угломъ $B'CA$, равнымъ углу BAC , и соединяю

точку B' съ A ; прямая CB' будетъ параллельна AB . Легко видѣть, что и линія AB' будетъ параллельна BC ; дѣйствительно, въ противномъ случаѣ, проведя чрезъ A параллельную къ BC , получилась бы прямая, отличная отъ AB' , напримѣръ AD или AD' , чего не можетъ быть, потому, что части DC и AB , или $D'C$ и AB , заключающіяся между параллельными, не были бы равны между собою. И такъ, AB' параллельна къ BC , а слѣдовательно $AB' = BC$. Такимъ образомъ доказано, что всѣ три стороны треугольника $AB'C$ равны соответственнымъ сторонамъ треугольника ABC , а отсюда слѣдуетъ, что разсматриваемые два треугольника равны между собою (Предложение 34).

Предложение 36. Пусть будетъ ABC треугольникъ, въ Фиг. 21. которомъ дана сторона AB и прилежащіе углы $BAC = a$ и $ABC = b$. Проводимъ BC' подъ угломъ a съ BA и AC' подъ угломъ b съ AB . Такъ какъ прямые BC' и AC' будутъ соответственно параллельны AC и CB (Предложение 26), то и получимъ $BC' = AC$ и $AC' = BC$, изъ чего заключаемъ, что стороны новаго треугольника соответственно равны сторонамъ стараго, и что слѣдовательно оба равны между собою (Предложение 34).

Предложение 37. Положимъ, что ABC изображаетъ тре- Фиг. 22. угольникъ, въ которомъ даны двѣ стороны AB и BC , и пусть BC будетъ меньшая изъ нихъ; сверхъ того данъ уголъ BAC , противолежащій меньшей сторонѣ BC . Опустимъ на сторону AC , если нужно продолженную, перпендикуляръ BD , и отложимъ отъ точки D линію $DE = CD$; окажется, что наклонная $BE = BC$ (Предложение 15). Слѣдовательно, согласно съ тѣмъ, что имѣемъ въ виду доказать, существуютъ два различные треугольника ABC и ABE , имѣющіе стороны AB и CB соответственно равныя сторонамъ AB и BE , а также общій уголъ BAC , противолежащій меньшей сторонѣ изъ двухъ данныхъ.

При томъ очевидно, что для настоящихъ данныхъ не можетъ существовать болѣе *двухъ* различныхъ треугольниковъ; дѣйствительно, мы знаемъ, что изъ точки В нельзя провести къ линіи АЕ болѣе *двухъ* равныхъ наклонныхъ (Слѣдствіе 17).

Сдѣланный разборъ приводитъ къ заключенію, что *сторона и двѣ какія ни есть изъ остальныхъ частей треугольника, вполне опредѣляютъ его, за исключеніемъ того только случая, когда даны двѣ стороны и уголъ, лежащій противъ меньшей стороны*; въ последнемъ случаѣ, какъ уже видѣли выше, получаются *два* треугольника, вмѣсто одного. Можно также замѣтить, что *когда треугольникъ опредѣляется тремя какими ни есть частями, то онъ опредѣляется и остальными тремя, исключая случай трехъ сторонъ*. Въ последнемъ предположеніи, остальные части будутъ *три* угла, которые не могутъ опредѣлить треугольника, а принадлежать безчисленному множеству треугольниковъ, различныхъ по своей величинѣ.

Изъ предложенія 37 выводится слѣдствіе:

Слѣдств. 38. *Прямоугольный треугольникъ опредѣляется гипотенузой и однимъ катетомъ.*

Фиг. 22. Дѣйствительно, такъ какъ въ настоящемъ случаѣ меньшая сторона разсматриваемаго треугольника есть ВD, то *двухъ* наклонныхъ ВС и ВЕ не будетъ, а останется одинъ только перпендикуляръ ВD, и слѣдовательно третья сторона АD вполне опредѣлится.

Признаки равенства треугольниковъ суть непосредственные слѣдствія доказанныхъ сей-часть предложеній.

7. *Всякое совокупленіе прямыхъ на плоскости, ограничивающихъ нѣкоторое пространство, называется многоугольникомъ.*

Раздѣленіе многоугольниковъ по числу сторонъ или угловъ

на *треугольники*, о которыхъ уже говорено, *четыреугольники*, *пятиугольники* и проч.

Различіе между многоугольниками съ углами *исходящими* и *входящими*. Въ Геометріи разсматриваются преимущественно первые.

Діагональ четырехугольника, пятиугольника и проч. называется *прямая линія, соединяющая вершины двухъ не смежныхъ угловъ* многоугольника.

Каждая сторона многоугольника *меньше* суммы *остальныхъ его сторонъ*.

Сумма внутреннихъ угловъ многоугольника *равна* *двумъ* *прямымъ угламъ* *столько разъ* *взятымъ, сколько въ много-* Прелл. 39.
угольнике сторонъ безъ двухъ.

Сумма внешнихъ угловъ многоугольника *равна* *двумъ* *прямымъ угламъ, умноженнымъ на число сторонъ* многоугольника, *увеличенное двумя единицами.*

Сумма внешнихъ угловъ многоугольника, *происходящихъ отъ продолженія его боковъ въ одну сторону, равна* *четыремъ* *прямымъ угламъ.*

Послѣ этихъ общихъ понятій о многоугольникахъ, Преподаватель разсмотритъ въ частности какой ни есть *четыреугольникъ*, и укажетъ на разные его виды, именно на *трапецію*, *параллелограмъ*, *ромбъ*, *прямоугольникъ* и *квадратъ*. Объяснивъ, на основаніи теоріи параллельныхъ линій, свойства угловъ и сторонъ послѣднихъ четырехъ фигуръ, онъ докажетъ, посредствомъ наложенія, случаи ихъ равенства. Что касается до равенства *діагоналей* въ *прямоугольникъ* и *квадратъ*, а равно свойство этихъ линій, по которому онѣ взаимно дѣлятся на равныя части въ упоминаемыхъ четырехъ фигурахъ, то всѣ эти предложенія выводятъ очень просто изъ признаковъ равенства треугольниковъ. Другія же свойства *четыреуголь-*

никовъ будутъ рассмотрѣны въ свое время по указанію Конспекта.

8. Разсмотрѣвъ главные соединенія прямыхъ линій, слѣдуетъ перейти къ ихъ измѣренію. Уже выше представлялись случаи говорить о линіяхъ *равныхъ* и *неравныхъ*. Но, при неравенствѣ прямыхъ, мы не могли еще опредѣлить, во сколько разъ одна изъ нихъ болѣе или менѣе другой. Займемся же теперь рѣшеніемъ этого вопроса.

Всякій знаетъ, что для *измѣренія протяженія въ длину* или *линій*, берутъ *единичную мѣру длины*, напримѣръ *аршинъ*, и накладываютъ его на измѣряемую длину до тѣхъ поръ, пока онъ не уляжется равное число разъ, или равное число разъ съ остаткомъ, меньшимъ аршина. Въ послѣднемъ случаѣ длину остатка опредѣляютъ числомъ *вершковъ*, или даже *вершиками съ дробными его частями*, о которыхъ, чаще всего, судятъ на глазомѣръ. По числу произведенныхъ наложеній узнаютъ длину измѣряемой линіи.

Положимъ теперь, что даны двѣ линіи, и требуется найти, во сколько разъ одна изъ нихъ больше другой, или, иначе, ищется *отношеніе* болѣеи линіи къ меньшей.

Для рѣшенія этого вопроса измѣримъ обѣ линіи, употребляя на то одну и ту же единичную длину, напримѣръ *сажень*, *аршинъ*, *футъ* и проч. Частное, происшедшее отъ раздѣленія болѣеи изъ найденныхъ чиселъ на меньшее, изобразитъ искомое *отношеніе*. Наглядные примѣры объяснятъ вполне это правило.

За симъ Преподаватель замѣтитъ, что рѣшеніе предъидущаго вопроса должно быть совершенно *независимо* отъ употребляемой *единичной мѣры*. Будемъ ли мѣрить каждую изъ двухъ линій *саженю*, *аршиномъ* или *футломъ*, отношеніе болѣеи къ меньшей чрезъ это не перемѣнится. И такъ, по даннымъ двумъ прямымъ, взаимное ихъ отношеніе должно опре-

дѣлиться независимо отъ всякой вспомогательной единичной длины. Рѣшимъ же на такомъ основаніи слѣдующій вопросъ:

Найти общую наибольшую мѣру двухъ данныхъ прямыхъ, и также численное ихъ отношеніе. Задача 40.

Замѣтивъ воспитанникамъ, что рѣшеніе этого вопроса основано на *способѣ опредѣленія общаго наиболѣеи дѣлителя* двухъ чиселъ, и напомнивъ вкратцѣ этотъ пріемъ, Преподаватель объяснитъ механизмъ производимаго дѣйствія обыкновеннымъ образомъ, а именно:

Меньшая линія накладывается на болѣеи возможное число разъ. Если, при послѣднемъ наложеніи, не получится никакого остатка, то меньшая линія будетъ наиболѣеи общаю мѣрою обихъ прямыхъ. Когда же произойдетъ остатокъ, то накладываютъ его на меньшую изъ данныхъ двухъ линій, пока такое наложеніе возможно: дѣйствіе кончится, если не будетъ втораго остатка; въ такомъ случаѣ первый остатокъ изобразитъ искомую общую наибольшую мѣру. При существованіи втораго остатка, надлежитъ поступать съ нимъ, какъ объяснено выше, то есть накладывать его на первый, и продолжать дѣйствіе въ означенномъ порядкѣ до тѣхъ поръ, пока не будетъ никакого остатка.

Послѣ этого очень легко найти и численное отношеніе данныхъ двухъ линій А и В. Положимъ, что $A > B$, и что по наложеніи оказалось

$$A = 3 B + C,$$

гдѣ С означаетъ *первый* остатокъ. Пусть также

$$B = 2 C + D,$$

разумѣя подъ D *второй* остатокъ. Примемъ, что D помѣстился ровно 5 разъ въ С; тогда будетъ

$$C = 5 D,$$

почему *третій* остатокъ не существуетъ. Линія D, по сказанному выше, будетъ *общаю наиболѣеи мѣрою* между дву-

мя данными линиями А и В. Отношение же ихъ $\frac{A}{B}$ определится очень просто: действительно получимъ

$$B = 2 \times 5 D + D = 11 D$$

$$A = 3 \times 11 D + 5 D = 38 D;$$

потому линия А состоитъ изъ 38 частей D, а В изъ 11 точно такихъ же частей. Следовательно, отношение $\frac{A}{B}$ равно отношению двухъ цѣлыхъ чиселъ 38 къ 11, и будетъ $\frac{38}{11}$.

Необходимо замѣтить воспитанникамъ, что показанное выше дѣйствіе для опредѣленія *общей наибольшей мѣры* между двумя линиями, можетъ продолжиться неопредѣленно, такъ что ни одинъ изъ опредѣляемыхъ послѣдовательно остатковъ, не будетъ заключаться цѣлое число разъ въ предыдущемъ. Конечно, при графическомъ рѣшеніи задачи, можно остановиться на такомъ остаткѣ, послѣ котораго новый, по малости своей, ускользаетъ отъ измѣренія; тогда получится очень приближенно и *общая наибольшая мѣра*, вообще весьма малая, а также и искомое *отношеніе* двухъ линий. Но, въ строгомъ смыслѣ, ни общая наибольшая мѣра, ни отношеніе линий, не могутъ быть опредѣлены. Въ такомъ случаѣ говоримъ, что данныя двѣ линіи *несоизмѣримы* между собой, то есть не допускаютъ общей мѣры, въ противоположность линіямъ, взаимно *соизмѣримымъ*, или имѣющимъ общую мѣру.

Отношеніе двухъ несоизмѣримыхъ линій будетъ *число несоизмѣримое*, именно такое, которое не можетъ быть выражено ни цѣлымъ числомъ, ни дробнымъ въ смыслѣ ариѣметическомъ. Очень не трудно удостовѣриться въ существованіи подобныхъ чиселъ. Для этого припомнимъ нѣкоторыя свойства обыкновенныхъ и десятичныхъ дробей. Въ Ариѣметикѣ доказываютъ, что *всякая обыкновенная дробь можетъ быть выражена или конечною десятичною дробью, или безконечною періодическою.*

Отсюда заключаемъ, что *безконечная десятичная дробь, не періодическая, не можетъ быть выражена обыкновенною дробью*, ибо, въ противномъ случаѣ, одно и то же дробное число выражалось бы двумя различными десятичными дробями, что очевидно невозможно. И такъ, остается только показать, что действительно существуютъ *безконечныя десятичныя дроби не періодическія*. Такихъ дробей безчисленное множество: въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ вообразить, что послѣдовательныя десятичныя цифры пишутся безъ всякаго порядка, или даже въ нѣкоторомъ порядкѣ, но не періодическомъ, какъ напр. въ дроби 0,101001000100001..., продолженной въ безконечность; въ ней, послѣ каждой единицы, прибавляется по одному нулю. Вотъ еще другіе примѣры:

2,313113111311113....

0,012001200012000012....

5,1223331122333111223331111....,

въ которыхъ послѣдовательность цифръ легко усматривается.

==

ВТОРОЙ ГОДЪ.

ОТДѢЛЪ III.

О КРУГОВОЙ ЛИНИИ. ИЗМѢРЕНІЕ УГЛОВЪ.

1. Преподаватель начнетъ курсъ 2-го года повтореніемъ двухъ Отдѣловъ Геометріи, изложенныхъ въ 1-мъ году. При такомъ повтореніи, имѣющимъ цѣлю освѣжить пройденное въ памяти воспитанниковъ, онъ ограничится обзорнымъ главныхъ предложеній, не останавливаясь на ихъ доказательствахъ. После того напомнивъ, что изъ кривыхъ линій, въ Начальной Геометріи разсматриваютъ только одну *круговую*, о которой всякій имѣетъ наглядное понятіе, онъ перейдетъ къ изслѣдованію свойствъ круга въ слѣдующемъ порядкѣ:

Круговою линіею или кругомъ называется такая кривая, которой всѣ точки лежатъ на одной плоскости, и равно удалены отъ некоторой определенной точки. Опред. 41.

Когда эта опредѣленная точка находится въ плоскости круговой линіи, то называется ея *центромъ*.

Круговую линію называютъ также *окружностію круга*, или просто *окружностію*. Подъ *кругомъ* въ Геометріи разумѣютъ собственно пространство, ограниченное круговою линіею. Впрочемъ, нередко кругъ принимается и въ смыслъ круговой линіи.

Потомъ слѣдуетъ объяснить названія: *радіусъ* или *полупе-*

речникъ, діаметръ или поперечникъ, дуга, хорда, секторъ, сегментъ, а также указать на употребленіе обыкновеннаго циркуля для черченія дугъ и полныхъ окружностей.

Изъ опредѣленія круговой линіи непосредственно заключаемъ, что *окружности, описанныя въ одной и той же плоскости равными радіусами, по совмѣщеніи ихъ центровъ, сами совмѣщаются.*

Дальнѣйшія свойства круговой линіи могутъ быть предложены въ слѣдующемъ порядкѣ:

Предл. 42. *Въ одномъ кругѣ, или въ равныхъ кругахъ, равнымъ дугамъ соответствуютъ равныя хорды, и обратно.*

Предл. 43. *Въ одномъ и томъ же кругѣ, или въ равныхъ кругахъ, бѣльшей дугѣ соответствуетъ бѣльшая хорда, и обратно.*

Предл. 44. *Діаметръ есть наибѣльшая хорда въ кругѣ, и раздѣляетъ его пополамъ.*

Въ Предложеніяхъ 42 и 43 предполагается, что разсматриваемыя дуги менѣе полуокружности.

Предл. 45. *Равныя хорды равно удалены отъ центра окружности, а изъ неравныхъ хордъ, менѣшая удалена бѣльше.*

Предл. 46. *2. Радіусъ, перпендикулярный къ хордѣ, раздѣляетъ какъ хорду, такъ и соответствующую ей дугу, на двѣ равныя части.*

Слѣдствіе. Перпендикуляръ, возставленный изъ середины хорды, всегда пройдетъ чрезъ центръ круга, и раздѣлитъ пополамъ дугу, соответствующую этой хордѣ.

Предл. 47. *Три точки, не лежащія на одной прямой, совершенно опредѣляютъ окружность, и при томъ только одну.*

Предл. 48. *3. Прямая линія пересѣкаетъ окружность только въ двухъ точкахъ.*

Прямая, пересѣкающая кругъ въ двухъ точкахъ, называется секущею.

Вслѣдъ за этимъ предложеніемъ Преподаватель разсмотритъ

вопросъ, можетъ ли прямая имѣть только одну точку, общую съ круговою линіею. Доказавъ обыкновеннымъ образомъ, что перпендикуляръ, возставленный изъ конца радіуса, имѣетъ съ окружностію только одну общую точку, онъ назоветъ этотъ перпендикуляръ касательною къ окружности, а точку общую — конецъ радіуса, — точкою касанія. Отсюда предложеніе

Предл. 49. *Перпендикуляръ, возставленный изъ конца радіуса, есть линія касательная къ кругу.*

Послѣ этого Предложенія легко уже разсмотрѣть всѣ три случая, представляющіеся при доказательствѣ слѣдующей теоремы:

Предл. 50. *Дуги одного и того же круга, заключающіяся между параллельными линіями, равны между собою; и обратно: двѣ линіи взаимно параллельны, когда отсѣкаютъ равныя дуги на одной и той же окружности.*

4. Теоремы, относящіяся къ пересѣченію и касанію двухъ окружностей, должны быть изложены въ слѣдующемъ порядкѣ:

Предл. 51. *Двѣ окружности пересѣкаются не бѣлье какъ въ двухъ точкахъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ двѣ окружности имѣли хотя три точки общія, то, въ силу Предложенія 47, онѣ не отличались бы одна отъ другой.

Предл. 52. *Прямая, соединяющая центры двухъ пересѣкающихся окружностей, перпендикулярна къ общей ихъ хордѣ, и раздѣляетъ еѣ пополамъ.*

Предл. 53. *Прямая, соединяющая центры двухъ взаимно касательныхъ круговъ, проходитъ чрезъ точку касанія.*

Слѣдствіе. Разстояніе центровъ двухъ касательныхъ окружностей равно суммѣ или разности ихъ радіусовъ, смотря по тому, будутъ ли оба круга касаться одинъ другаго внѣшними частями, или одинъ внѣшнюю, а другой наружную.

Для пересѣченія двухъ окружностей необходимо, и при

Предл. 54. *тогда достаточно, чтобы расстояние между их центрами было меньше суммы двух радиусов, а больше их разности.*

Доказывая эти предложения, Преподаватель обратит внимание и на обратные, не представляющие ни малейшего затруднения.

5. После сказанного об окружности, понятие об угле, предложенное в № 2 (Опр. 9), может быть дополнено изложением способа, посредством которого углы *сравниваются между собою*, а следовательно и *измеряются*. Условясь в названии *угол при центре*, Преподаватель докажет, что *в одном и том же круге, или в равных окружностях, углы при центре равны, когда между их сторонами заключаются равные дуги*; и обратно: *когда дуги равны, то и углы при центре равны*. Потом он предложит теорему, на которой основано сравнение углов, именно:

В одном круге, или в равных окружностях, углы при центре соответственно пропорциональны дугам, заключающимся между их сторонами.

Преподаватель докажет это *Предложение* сперва для того случая, когда дуги *соизмеримы* между собою, соображаясь с приемом, употребленным в № 8 (Отдѣлъ II) для двух прямых линий. При употреблении упоминаемого способа, он замѣтит, что для сравнения дуг нѣтъ никакой надобности *спрямлять* их предварительно; цель достигается разсужденіемъ *хорды*, когда примемъ въ соображеніе, что равнымъ дугамъ соответствуютъ и равныя хорды (Предл. 42). Потомъ онъ перейдетъ къ предположенію двухъ дугъ *несоизмеримыхъ*, руководствуясь известнымъ *способомъ приведенія къ противорѣчію*, который обыкновенно употребляется, когда имѣютъ въ виду распространить на общій случай предложенія, доказанныя только для величинъ соизмеримыхъ.

Теперь легко условиться въ томъ, какимъ образомъ изме-

ряются углы. Такъ какъ подъ *измѣреніемъ* какой ни есть величины должно разумѣть опредѣленіе ея отношенія къ другой, одного съ нею рода, и принимаемой за единицу, то и здѣсь слѣдовало бы принять нѣкоторый уголъ за единицу, и сравнивать съ нимъ другіе, данные углы. Всего естественнѣе было бы принять *прямой уголъ* за *угловую единицу*. Въ такомъ случаѣ все острые углы выражались бы числами, заключающимися между 0 и 1, а тупые, между 1 и 2. Но, основываясь на *Предл. 55*, нашли болѣе удобнымъ ввести въ измѣреніе угловъ понятие объ окружности. Въ этомъ смыслѣ и говорятъ, что *уголъ при окружности измѣряется дугою, заключающеюся между его сторонами*. Дѣйствительно, такъ какъ уголъ увеличивается или уменьшается въ одномъ и томъ же отношеніи какъ и соответственная ему дуга, описанная однимъ радиусомъ, то можно, по величинѣ дуги, судить и о величинѣ угла. Но, при такомъ измѣреніи угловъ, надобно наблюдать, чтобы дуги, служащія имъ мѣрою, были описаны однимъ и тѣмъ же радиусомъ, который и согласился принять за единицу; поэтому, *при радиусѣ равномъ единицѣ, углы равны соответственнымъ дугамъ*.

За симъ Преподаватель скажетъ, что для удобства въ практикѣ, давно уже согласились раздѣлять полную окружность на 360 равныхъ частей, названныхъ *градусами* ($^{\circ}$), градусъ на 60 *минутъ* ($'$), минуту на 60 *секундъ* ($''$) и такъ далѣе. Здѣсь кстати объяснить употребленіе *транспортнаго*. На *десятичномъ дѣленіи* прямого угла по *Французской метрической системѣ*, нѣтъ надобности останавливаться; достаточно сказать, что прямой уголъ раздѣляется на 100 равныхъ частей, называемыхъ *десятичными градусами* (*grades*), градусъ на 100 *минутъ*, минута на 100 *секундъ* и такъ далѣе. Это дѣленіе нынѣ мало употребляется.

6. Объяснивъ значеніе наименованій *уголъ при центрѣ*, *внутренній* и *внѣшній уголъ*, Преподаватель докажетъ по порядку слѣдующія предложенія, выводя изъ нихъ и главные слѣдствія:

Предл. 56. *Уголъ при окружности измѣряется половиною дуги, заключающейся между его сторонами.*

Предл. 57. *Два угла, составляемые хордою и касательною къ кругу, проходящею чрезъ конецъ хорды, измѣряются половиною дугъ, соответствующихъ этой хордѣ. Половина меньшей дуги будетъ измѣрять уголъ острый, а половина большей, уголъ тупой.*

Предл. 58. *Внутренній уголъ измѣряется полу-суммою дугъ, заключающихся между сторонами угла и ихъ продолженіями.*

Предл. 59. *Внѣшній уголъ измѣряется полу-разностію дугъ, заключающихся между сторонами угла.*

О Т Д Ъ Л Ъ IV.

Задачи, относящіяся къ предъидущимъ Отдѣламъ.

Употребленіе линейки, циркуля и транспортира уже отчасти извѣстно воспитанникамъ изъ предъидущаго; приступая же къ графическому рѣшенію разныхъ вопросовъ, полезно повторить и объяснить съ большими подробностями сказанное прежде объ этихъ инструментахъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ Преподаватель покажетъ употребленіе *чертежнаго треугольника* (прямоугольнаго) или *наугольника* для проведенія линій перпендикулярныхъ и параллельныхъ къ даннымъ прямымъ. Полезно также показать и повѣрку упоминаемыхъ здѣсь инструментовъ.

Всѣ задачи, помѣщенныя въ этомъ Отдѣлѣ, очень просты.

При рѣшеніи ихъ можно руководствоваться изложеніемъ *Лежандра* или *Лакруа*. Вотъ эти вопросы:

7. *Провести перпендикуляръ и параллельную линію къ данной прямой.*

8. *Раздѣлить данную прямую и данный уголъ на 2, 4, 8, 16.... равныхъ частей.*

9. *Построить уголъ равный данному. Построить треугольникъ по тремъ даннымъ его частямъ.*

10. *Провести касательную къ кругу изъ данной точки, также параллельно данной прямой, или вообще подѣ какимъ ни есть угломъ съ этою прямою.*

11. *Описать кругъ около треугольника. Условіе, при которомъ кругъ можетъ быть описанъ около четырехугольника. Вписать кругъ въ треугольникъ. По данной окружности или дугѣ, найти ея центръ.*

12. *Описать кругъ, проходящій чрезъ двѣ точки, и касающійся данной прямой.*

13. *На данной прямой начертить сегментъ, вмѣщающій данный уголъ.*

О Т Д Ъ Л Ъ V.

Пропорціональныя линіи и подобныя прямолинейныя фигуры.

14. Въ № 8 (Отдѣлъ I) было показано, какимъ образомъ опредѣляютъ *отношеніе* двухъ данныхъ прямыхъ линій. Посмотримъ теперь, какія взаимныя соотношенія могутъ существовать между различными совокупленіями прямыхъ линій, или, иначе, между сторонами прямолинейныхъ фигуръ.

Повторивъ въ короткихъ словахъ предложенныя въ Алгебрѣ

главные свойства пропорцій, и объяснивъ понятіе о *пропорціональности* двухъ величинъ, Преподаватель начнетъ изложеніе *теоріи пропорціональныхъ линій* слѣдующею основною теоремою:

Предл. 60. *Когда два прямыхъ пересѣчены параллельными линіями, отрѣзывающими равныя части на одной изъ нихъ, то отрѣзки на другой будутъ также равны между собою.*

Доказавъ это предложеніе обыкновеннымъ образомъ на основаніи равенства треугольниковъ, Преподаватель перейдетъ къ слѣдующей теоремѣ:

Теорема 61. *Прямая, проведенная въ треугольникъ параллельно одной изъ его сторонъ, раздѣляетъ два другія его стороны на части пропорціональныя, и обратно: если прямая линія раздѣляетъ две стороны треугольника на части пропорціональныя, то она параллельна третьей его сторонѣ.*

Отсюда выводится *Слѣдствіе*:

Слѣдст. 62. *Параллельныя прямыя отсѣкаютъ отъ двухъ какихъ ни есть прямыхъ линій части пропорціональныя, и обратно: если отрѣзки пропорціональны, то линіи, отсѣкающія ихъ, параллельны между собой.*

Теорема 61 въ томъ случаѣ, когда два отрѣзка на одной изъ двухъ сторонъ даннаго треугольника *соизмѣримы* между собою, доказывается подобно Предл. 60. Для отрѣзковъ *несоизмѣримыхъ*, должно обратиться къ извѣстному способу *приведенія къ противорѣчію*, соображаясь, напримѣръ, съ изложеніемъ *Лакруа* или другихъ авторовъ хорошихъ курсовъ Геометріи.

15. Вслѣдъ за этимъ Преподаватель условится съ учащимися въ значеніи употребляемаго, для сокращенія рѣчи, названія *равноугольныхъ фигуръ*.

Два треугольника называются *равноугольными*, когда углы одного изъ нихъ равны угламъ другаго. Въ этомъ смыслѣ

треугольникъ, имѣющій всѣ три угла различныя, можетъ быть *равноугольнымъ* въ отношеніи къ другому.

Вообще, два многоугольника называются *равноугольными*, когда углы одного изъ нихъ равны угламъ другаго, и, сверхъ того, расположены одинаковымъ образомъ въ обоихъ разсматриваемыхъ многоугольникахъ.

Подъ *сходственными* сторонами двухъ или нѣсколькихъ равноугольныхъ многоугольниковъ разумѣются стороны, прилежащія двумъ равнымъ угламъ въ каждомъ изъ нихъ, или стороны, имѣющія одинаковое положеніе во всѣхъ этихъ фигурахъ.

Послѣ приведенныхъ объясненій слѣдуетъ предложить опредѣленіе *подобныхъ треугольниковъ*, и заняться изложеніемъ самыхъ признаковъ ихъ *подобія*.

Подобными треугольниками называются *треугольники равноугольные, или, что все равно, такіе, у которыхъ стороны пропорціональны* (Теорема 61) *). Опред. 63.

Предложенія, относящіяся къ подобію треугольниковъ, Преподаватель изложитъ въ слѣдующемъ порядкѣ, при чемъ можетъ придерживаться Геометріи *Лакруа*:

Сверхъ признаковъ подобія, заключающихся въ самомъ Опред. 63, два треугольника подобны

Когда имѣютъ уголъ равный, заключающійся между сторонами пропорціональными.

Когда стороны одного соответственно параллельны или перпендикулярны сторонамъ другаго. Предл. 64.

(*) Въмѣсто шести условій: равенства трехъ угловъ и пропорціональности трехъ сторонъ, обыкновенно предлагаемыхъ при опредѣленіи подобныхъ треугольниковъ, мы предпочли ввести только три требованія, чтобы предупредить возраженіе относительно возможности удовлетворенія всѣмъ шести условіямъ разомъ.

Разсматривая въ частности прямоугольный треугольникъ, выведутся слѣдующія заключенія:

Если изъ вершины прямого угла прямоугольнаго треугольника будетъ опущенъ перпендикуляръ на его гипотенузу, то

1-е. Этотъ перпендикуляръ раздѣлитъ треугольникъ на два другіе, подобные какъ между собою, такъ и данному.

Предл. 65.

2-е. Перпендикуляръ будетъ среднею пропорціональною величиною между двумя отрѣзками гипотенузы.

3-е. Каждый изъ катетовъ даннаго треугольника будетъ среднею пропорціональною величиною между гипотенузою и прилежащимъ отрѣзкомъ.

Примѣчаніе. Последнее изъ этихъ предложеній приводитъ непосредственно къ *Пифагоровой теоремѣ*. Но, излагая её, должно объяснить учащимся, что доказанное свойство, по которому *квадратъ гипотенузы равенъ суммѣ квадратовъ двухъ катетовъ*, предполагаетъ, что каждая изъ трехъ сторонъ даннаго прямоугольнаго треугольника отвесена къ какой либо линейной мѣрѣ, почему подразумѣвается, что эти три стороны изображены *отвлеченными числами*. Говорить же здѣсь, что *площадь квадрата, построеннаго на гипотенузѣ, равна суммѣ площадей квадратовъ, построенныхъ на двухъ катетахъ*, несвоевременно. Пифагорова теорема, въ последнемъ смыслѣ, изложена, по принятой въ Конспектѣ системѣ, въ Отдѣлѣ VII (№ 31).

16. Два многоугольника называются подобными, когда они
Опред. 66. равноугольны, и, сверхъ того, имѣютъ сходственные стороны пропорціональныя.

Впрочемъ, должно замѣтить, что это опредѣленіе заключаетъ въ себѣ лишнія условія; дѣйствительно, для подобія двухъ многоугольниковъ достаточно, чтобы углы, за исключеніемъ одного, и стороны, также за исключеніемъ одной, удо-

вѣтворяли сказаннымъ условіямъ. Но, для краткости рѣчи, можно удержатъ предложенное выше опредѣленіе.

Слѣдуетъ также объяснить, почему два равноугольные многоугольника (исключая треугольники) могутъ не быть подобными. Равнымъ образомъ, при пропорціональности всѣхъ сходственныхъ сторонъ, многоугольники могутъ быть неравноугольными, и слѣдовательно *неподобными* (кромѣ треугольниковъ). Для объясненія втораго утвержденія, стоитъ только обратить вниманіе воспитанниковъ на то, что имѣя два многоугольника съ сходственными сторонами, соответственно пропорціональными, можно измѣнять видъ одного изъ нихъ многообразными образами, вообразивъ, напримѣръ, что въ вершинахъ его угловъ находятся шарнеры, около осей которыхъ стороны свободно обращаются.

Многоугольники, составленные изъ одинаковаго числа треугольниковъ, подобных и одинаково расположенныхъ, подобны между собою, и обратно: подобные многоугольники могутъ быть разложены на одинаковое число треугольниковъ, подобных и одинаково расположенныхъ. Предл. 67.

Слѣдствія Предл. 67 относительно *квадратовъ, ромбовъ, прямоугольниковъ и параллелограмовъ*.

Сходственные линіи въ подобныхъ многоугольникахъ пропорціонны между собою. Предл. 68.

Периметры подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ сходственные стороны, или другія сходственные линіи въ этихъ самыхъ многоугольникахъ. Предл. 69.

17. Многоугольникъ называется правильнымъ, когда всѣ его стороны, а также и углы, равны между собою. Опред. 70.

Слѣдовательно, *правильные многоугольники одинаковаго числа сторонъ, подобны между собою*.

Всякій правильный многоугольникъ можетъ быть вписанъ въ кругъ, а также описанъ около него. Предл. 71.

Слѣдуетъ также доказать предложеніе, обратное 71-му.

Центръ круга, описаннаго около правильнаго многоугольника, или вписаннаго въ немъ, называется *центромъ* разсматриваемаго многоугольника, а перпендикуляръ, опущенный изъ этой точки на какую ни есть изъ его сторонъ, и раздѣляющій её пополамъ, *апотемою* многоугольника. *Углами при центрѣ* называются углы между прямыми, проведенными изъ центра многоугольника къ его угламъ. Такъ какъ *углы при центрѣ всѣ равны между собою, а сумма ихъ составляетъ четыре прямые угла, то каждый будетъ равенъ четыремъ прямымъ, раздѣленнымъ на число сторонъ многоугольника.*

При доказательствѣ Предл. 71, Преподаватель обратитъ вниманіе учащихся на пріёмъ, посредствомъ котораго находятъ центръ вписаннаго или описаннаго многоугольника.

Предл. 72. *Периметры правильныхъ многоугольниковъ, одинаковаго числа сторонъ, пропорціональны радіусамъ вписанныхъ и описанныхъ окружностей.*

Предл. 73. *18. Отрѣзки двухъ хордъ, пересѣкающихся въ кругъ, обратно пропорціональны.*

Изъ этого предложенія выводится, какъ слѣдствіе, слѣдующая теорема:

Предл. 74. *Перпендикуляръ, возставленный изъ какой ни есть точки діаметра, до встрѣчи съ окружностію, есть средняя пропорціональная линія между двумя отрѣзками діаметра (См. второе изъ предложеній 65).*

Предл. 75. *Когда изъ точки, взятой внѣ круга, проведены двѣ съкущія до дальнѣйшей части окружности, то цѣлыя съкущія будутъ обратно пропорціональны вѣншиимъ своимъ отрѣзкамъ.*

Замѣняя одну изъ съкущихъ касательною къ окружности, получимъ теорему:

Когда изъ точки, взятой внѣ круга, проведена одна съку-

щяя и одна касательная къ окружности, то касательная будетъ среднею пропорціональною между цѣлою съкущею и вѣншиною ея частию. Предл. 76.

19. Такъ какъ при доказательствѣ пропорціональности окружностей къ ихъ радіусамъ, а равно и при дальнѣйшемъ изложеніи Геометріи, должно будетъ основываться на способѣ *безконечно-малыхъ величинъ*, еще не знакомомъ учащимся, то необходимо войти по этому предмету въ нѣкоторыя подробности.

Чтобъ ознакомить воспитанниковъ съ понятіемъ, новымъ для нихъ, о *неизмѣримо-малыхъ величинахъ*, можно, для вразумительности, начать съ неопредѣленнаго разложенія на части какой ни есть величины, на примѣръ прямой линіи. Пусть будетъ данная прямая АВ; раздѣляемъ её, положимъ на двѣ равныя части АС и СВ; потомъ СВ дѣлимъ опять на двѣ равныя части СD и DB; DB дѣлимъ точно также пополамъ, и получаемъ линію EB; беремъ половину EB, находимъ FB и такъ далѣе. Такимъ образомъ получимъ рядъ линій

Фиг. 23.

АВ, СВ, DB, EB, FB и проч.,

изъ которыхъ каждая равна половинѣ предъидущей. Такъ какъ нѣтъ никакого препятствія продолжать умственно дѣленіе неограниченное число разъ, то наконецъ достигнемъ такихъ линій, которыя, по малости своей, неуловимы для чувствъ, и не подлежатъ больше никакому измѣренію; такія линіи мы назовемъ *безконечно* или *неизмѣримо-малыми*. Хотя мы и не можемъ составить себѣ яснаго понятія о линіяхъ этого рода, однакожъ, изъ сказаннаго, одно свойство ихъ оказывается для насъ несомнѣннымъ; это свойство состоитъ въ томъ, что безконечно-малая линія менѣе всякой другой опредѣленной линіи, взятой для сравненія. Этимъ самымъ отличаются неизмѣримо-малыя линіи отъ *конечныхъ*, т. е. отъ такихъ, которыя постигаются чувствами. Сказанное здѣсь можетъ быть

непосредственно отнесено и ко всякой другой величинѣ, какого бы она не была рода, а равно и къ числамъ отвлеченнымъ. Въ этомъ смыслѣ говорить:

Опред. 77. *Неизмѣримо-малая величина есть такая, которая меньше всякой данной величины, одного съ нею рода.*

Примѣчаніе. Это опредѣленіе неизмѣримо-малыхъ величинъ достаточно для всѣхъ случаевъ, въ которыхъ онѣ употребляются. Метафизическое же понятіе объ нихъ не можетъ быть совершенно яснымъ, и при томъ бесполезно въ приложеніяхъ. Можно утвердительно сказать, что всё доказываемое на основаніи теоріи бесконечно-малыхъ, не только въ Начальной Геометріи, но и въ высшихъ частяхъ Математики, не предполагаетъ инаго понятія о величинахъ этого рода, какъ только того, которое заключается въ *Опред. 77*. Однимъ словомъ, *всякое предложеніе, доказываемое для такъ называемой бесконечно-малой величины, равно справедливо и для величины, подчиненной условію быть меньше всякой другой данной, какъ бы послѣдняя мала не была, и обратно.*

Изъ *Опред. 77* проистекаетъ полезное слѣдствіе, относящееся къ неизмѣримо-малымъ величинамъ; чтобы выразить его яснѣе, условимся въ смыслѣ наименованій: *постоянная и перемѣнная величина. Подъ постоянною величиною разумѣемъ такую, которая въ продолженіи доказательства какого либо предложенія, или рѣшенія вопроса, сохраняетъ одно и то же значеніе. Напротивъ того, перемѣнная величина, при тѣхъ же обстоятельствахъ, измѣняется. Такъ, напримѣръ, три угла и три стороны даннаго треугольника, и вообще части какого бы то ни было многоугольника, радіусъ опредѣленнаго круга и проч., будутъ величины постоянныя. Напротивъ того, если станемъ разсматривать въ одномъ треугольникѣ линію, положимъ параллельную которой нибудь изъ его сторонъ, то эта линія, по мѣрѣ приближенія къ разсма-*

триваемой сторонѣ, и слѣдовательно удаленія отъ противоположнаго угла, будетъ постепенно увеличиваться. Такая линія будетъ *перемѣнная*. То же самое можно сказать о хордахъ одного и того же круга, а равно о перпендикулярахъ, составляемыхъ изъ послѣдовательныхъ точекъ діаметра, и ограниченныхъ съ другой стороны окружностію.

Если означимъ чрезъ А и В двѣ конечныя постоянныя величины, а чрезъ а и b неизмѣримо-малыя количества, и между тѣмъ найдемъ

Предм. 78.

$$A + a = B + b,$$

то должно будетъ заключить изъ этого равенства, что $A = B$.

Въ самомъ дѣлѣ, принявъ $A > B$, получимъ

$$A - B = b - a;$$

но положительная разность $A - B$ постоянная, между тѣмъ какъ $b - a$ означаетъ неизмѣримо-малую величину, которая, поэтому, можетъ быть сдѣлана менѣе данной величины $A - B$. Слѣдовательно, нельзя предположить, чтобы A было больше B . Совершенно подобнымъ образомъ докажемъ, что A не можетъ быть меньше B . Это самое приведетъ насъ къ заключенію, что $A = B$, или, иначе, что *когда двѣ конечныя постоянныя величины разстаютъ между собою неизмѣримо-малымъ количествомъ, то онѣ должны быть принимаемы, въ строгомъ смыслѣ, за количества равныя одно другому.*

Изъ предложеннаго понятія о бесконечно-малыхъ величинахъ заключаемъ также, что произведеніе конечной величины на неизмѣримо-малую, придаваемое или отнимаемое отъ опредѣленной конечной величины, въ строгомъ смыслѣ должно быть откинуто. Поэтому, если бы нашли, напримѣръ, равенство

$$A = B + Mb,$$

гдѣ A , B и M конечныя величины, а b неизмѣримо-малая, то надлежало бы заключить, что $A = B$. Въ самомъ дѣлѣ, равенство $A - B = Mb$ не можетъ состояться ни при $A > B$, ни при $A < B$ по той причинѣ, что, въ обоихъ предположеніяхъ, разность $A - B$ или $B - A$ постоянная, а количество Mb , которое

всегда может быть сдѣлано менѣ $A-B$ или $B-A$, остается переменнымъ до тѣхъ поръ, пока не откинемъ его.

Подобнымъ образомъ удостовѣримся, что когда имѣемъ равенство вида

$$A = B + C,$$

гдѣ C такого свойства, что отношенія $\frac{C}{A}$ и $\frac{C}{B}$ бесконечно малы, при чемъ отношеніе $\frac{A}{B}$ или $\frac{B}{A}$ остается конечнымъ и постояннымъ, то, каковы бы впрочемъ ни были эти три величины A , B и C , должно откинуть C , такъ что $A = B$.

Дѣйствительно, раздѣливъ предыдущее уравненіе на B , получимъ

$$\frac{A}{B} = 1 + \frac{C}{B} \text{ или } \frac{A}{B} - 1 = \frac{C}{B};$$

но какъ разность $\frac{A}{B} - 1$ постоянная, а величина $\frac{C}{B}$ переменная, ибо, по предположенію, $\frac{C}{B}$ неизмѣримо-малое количество, то и слѣдуетъ откинуть $\frac{C}{B}$, и найдемъ просто $\frac{A}{B} - 1 = 0$, то есть $A = B$.

Сказанное здѣсь о бесконечно-малыхъ количествахъ относится ко всѣмъ подобнымъ величинамъ, какого бы рода онѣ ни были. Для приложеній собственно геометрическихъ, слѣдуетъ прибавить къ вышеобъясненному еще нѣкоторыя соображенія, которыя значительно облегчатъ изложеніе многихъ статей Геометріи.

Часто случается, что заключенія, выводимыя для прямолинейной фигуры, приличествуютъ и криволинейной, разсматривая послѣднюю какъ линію ломаную, состоящую изъ безчисленнаго множества неизмѣримо-малыхъ прямыхъ. Положимъ, что на какой либо кривой линіи взяли двѣ точки, весьма близкія одна отъ другой; въ такомъ предположеніи, прямолинейное разстояніе между ними, то есть хорда, чувствительнымъ образомъ сольется съ весьма малою дугою самой кривой, заключающеюся между тѣми же точками. Покажемъ хорда, о

которой говоримъ, будетъ длиною конечною, то, само собою разумѣется, замѣненіе дуги этою хордою непозволительно въ строгомъ смыслѣ, а можетъ быть допущено только приблизительно. Но если примемъ дугу между двумя точками за количество неизмѣримо-малое, то есть за величину, которая менѣ всякой данной величины, то и соответствующая дугъ хорда будетъ точно такого же свойства; тогда, со всею строгостію, можно будетъ замѣнить дугу ея хордою, а слѣдовательно всю кривую принимать за ломаную линію, составленную изъ безчисленнаго множества неизмѣримо-малыхъ прямыхъ.

Допущ. 79.

И такъ, если вообразимъ, что окружность круга раздѣлена на равныя неизмѣримо-малыя части, то хорды этихъ частей составятъ правильный, вписанный въ кругъ многоугольникъ, которымъ, въ силу *Допущенія 79*, можно замѣнить самую окружность. Изъ этого усматриваемъ, что свойства, общія какимъ ни есть правильнымъ многоугольникамъ, приличествуютъ также и окружности круга. Слѣдовательно

Окружности пропорціональны соответственнымъ имъ радиусамъ, и всѣ круги подобны между собою.

Предл. 80.

На основаніи этой теоремы очень легко найти радіусъ окружности, которая содержалась бы къ данной, какъ два данныя числа или двѣ данныя линіи. Этотъ вопросъ очевидно приведется къ опредѣленію линіи, имѣющей съ предложенною извѣстное отношеніе (*Отдѣлъ VI, № 20*).

Введеніе въ Начальную Геометрію способа бесконечно-малыхъ величинъ значительно облегчитъ изслѣдованіе свойствъ круга, объемовъ многогранниковъ, а равно поверхностей и объемовъ круглыхъ тѣлъ. По простотѣ своей и по наглядности доказательствъ, основанныхъ на немъ, этотъ способъ имѣетъ несомнѣнное преимущество предъ *способомъ предполовъ* и другими видоизмѣненіями послѣдняго (*Общія Замѣчанія*,

№ VII). Поэтому, въ послѣдствіи, измѣреніе объёма пирамиды, а также поверхностей и объёмовъ цилиндра, конуса и шара, будемъ основывать на разсматриваніи неизмѣримо-малыхъ величинъ.

ОТДѢЛЪ VI.

Задачи, относящіяся къ предъидущему отдѣлу.

Этотъ Отдѣлъ содержитъ въ себѣ восемь статей, именно:

20. Построить четвертую пропорціональную къ тремъ даннымъ линіямъ. Раздѣлить данную прямую на нѣсколько равныхъ частей, и вообще на нѣсколько частей, находящихся между собой въ данномъ отношеніи. Раздѣлить данную прямую на части, пропорціональныя частямъ другой прямой. Построеніе и употребленіе масштабовъ.

21. На данной прямой построить многоугольникъ, подобный данному.

22. Построить среднюю пропорціональную между двумя данными прямыми. Черезъ данныя двѣ точки провести кругъ касательный къ данной прямой.

23. Раздѣлить данную линію въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.

24. Провести общія касательныя къ двумъ даннымъ кругамъ.

25. По данному вписанному въ кругъ правильному многоугольнику, построить правильный многоугольникъ съ тѣмъ же числомъ сторонъ, описанный около круга, и на-оборотъ: имѣя послѣдній, построить первый. По данному радіусу и сторонъ вписаннаго въ кругъ правильнаго многоугольника, вычислить сторону многоугольника описаннаго, съ тѣмъ же числомъ сторонъ. По данному радіусу круга и сторонъ вписанна-

го правильнаго многоугольника, найти сторону вписаннаго же правильнаго многоугольника, но съ двойнымъ числомъ сторонъ.

26. Построить правильные многоугольники о 4, 8, 16...., 3, 6, 12...., 5, 10, 20...., 15, 30...., сторонахъ.

Примѣчаніе. Преподаватель, показавъ построеніе правильныхъ многоугольниковъ, исчисленныхъ въ № 26, замѣтитъ, что кромѣ ихъ существуютъ многіе другіе, въ томъ числѣ 17-угольникъ, которые могутъ быть построены геометрически, то есть, чрезъ совокупленіе прямыхъ линій и окружностей, или, иначе, помощію линейки и циркуля. Построенія эти будутъ вообще весьма сложны. Посредствомъ же транспортира можно строить очень просто правильныя многоугольники о сколькихъ угодно сторонахъ; но это будетъ уже способъ механический, а не геометрический. Дальнѣйшія подробности объ этомъ предметѣ, собственно для себя, Преподаватель можетъ почерпнуть изъ разныхъ книгъ, преимущественно изъ сочиненія Гаусса: *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801 г. (*). Въ этомъ примѣчательномъ трудѣ знаменитый Германскій Математикъ предложилъ слѣдующую, открытую имъ теорему: Чтобы геометрическое раздѣленіе окружности на m равныхъ частей было возможно, число m не должно заключать другихъ простыхъ начётныхъ дѣлителей, какъ только вида $2^n - 1$, и сверхъ того все эти дѣлители должны быть различны между собою.

27. Показать возможность опредѣленія приближеннаго отношенія окружности къ діаметру. Приближенныя выраженія для этого отношенія. Вычисленіе длины окружности,

(*) Эта книга переведена на Французскій языкъ подъ заглавіемъ: *Recherches arithmétiques*, traduites par A. C. M. Pouillet-Detisle, 1807.

или какой ни есть ее части, по данному радиусу, и обратно: определение радиуса по данной окружности.

Рѣшеніе этого вопроса можно изложить въ слѣдующемъ объѣмѣ:

Положимъ, прежде всего, что въ данномъ кругѣ вписали правильный многоугольникъ объ известномъ, впрочемъ произвольномъ числѣ сторонъ, напримѣръ о 6-ти, 12-ти, 24-хъ и проч. сторонахъ. Чѣмъ значительнѣе число сторонъ вписаннаго въ кругѣ правильного многоугольника, тѣмъ менѣе периметръ его будетъ разнствовать отъ самой окружности; въ этомъ легко удостовѣриться, принявъ въ соображеніе, что *периметръ правильного вписаннаго многоугольника увеличивается съ возрастаніемъ числа сторонъ*. И дѣйствительно, если бѣ удвоили, напримѣръ, число сторонъ, то вмѣсто стороны АВ, принадлежащей прежнему многоугольнику, получили бы двѣ стороны равныя АС и СВ, сумма которыхъ очевидно болѣе прямой АВ (Акс. 2). Изъ этой же аксіомы заключаемъ: *какъ бы число сторонъ вписаннаго многоугольника велико не было, периметръ его будетъ всегда менѣе окружности*. Подобнымъ образомъ Преподаватель покажетъ, что *периметръ описаннаго правильного многоугольника уменьшается съ увеличеніемъ числа сторонъ*. Чтобы доказать, что при такомъ уменьшеніи периметръ описаннаго многоугольника будетъ всегда болѣе окружности, можно употребить обыкновенный пріёмъ, излагая его, напримѣръ, какъ въ Геометріи *Лезандра* (Livre IV, Proposition IX; 12-ème édition). Сближеніе всего сказаннаго приведетъ къ заключенію, что *окружность круга будетъ постоянно заключаться между периметрами вписаннаго и описаннаго около нея многоугольниковъ*.

На такомъ основаніи, возможность опредѣленія приближеннаго отношенія окружности къ діаметру легко объясняется. Въ самомъ дѣлѣ, если, принявъ радиусъ разсматриваемаго круга

Фиг. 24.

за единицу, и вспомнивъ, что сторона правильного вписаннаго шестиугольника равна радиусу, или 1, вычислимъ послѣдовательно стороны вписанныхъ 12-ти, 24-хъ, 48-ми, 96-ти.... угольниковъ (№ 25), то получимъ искомыя стороны въ частяхъ радиуса, то есть въ отвлеченныхъ дробяхъ. Пусть

Сторона 12-ти угольника вписаннаго = с

» 24-хъ » » = с'

» 48-ми » » = с''

» 96-ти » » = с'''

Числа 12с, 24с', 48с'', 96с'''...., въ слѣдствіе объясненнаго выше, будутъ постепенно приближаться къ длинѣ окружности, оставаясь впрочемъ менѣе ея. Чтобы ближе судить о достигаемой степени приближенія, вычисляемъ стороны правильныхъ описанныхъ многоугольниковъ о 12-ти, 24-хъ, 48-ми, 96-ти.... сторонахъ при томъ же радиусѣ 1 (№ 25). Означимъ эти стороны чрезъ С, С', С'', С'''....; числа 12С, 24С', 48С'', 96С'''... будутъ также постепенно приближаться къ длинѣ окружности, при радиусѣ равномъ 1, оставаясь впрочемъ болѣе ея. Приведа числа

12с,	12С,
24с',	24С'
48с'',	48С''
96с''',	96С'''
.....

въ десятичныя дроби, окажется, что десятичные знаки, общіе двумъ соответственнымъ дробямъ, будутъ, въ строгомъ смыслѣ, принадлежать искомому отношенію окружности къ діаметру. На такомъ основаніи уже легко судить о степени приближенія полученнаго результата.

Такимъ образомъ *Архимедъ*, славный Греческій геометръ, жившій въ Сиракузахъ за 250 лѣтъ до Р. Х., вычисливъ стороны двухъ правильныхъ 96-ти угольниковъ, одного вписаннаго, а другаго описаннаго около круга, нашелъ, что отношеніе

окружности къ діаметру, или полуокружности къ радіусу, подходит очень близко къ содержанію $\frac{22}{7}$, такъ что эта дробь превышаетъ истинное отношеніе менѣе чѣмъ на *два тысячныхъ доли радіуса*. Голландскій математикъ *Мецій*, жившій въ семнадцатомъ столѣтіи, предложилъ для изображенія этого отношенія дробь $\frac{355}{113}$, которая превышаетъ истинное менѣе чѣмъ на *полу-милліонную часть радіуса*. Дробь $\frac{355}{113}$ очень легко удержать въ памяти, обративъ вниманіе на то, что написавъ по два раза сряду нечѣтныя числа 113355, первыя три изобразятъ ея знаменатель, а послѣднія три, числитель.

Можно замѣтить воспитанникамъ, что теперь, при пособіи высшихъ частей Математики, находятъ весьма просто отношеніе полуокружности къ радіусу съ такою степенью приближенія, какой пожелаютъ. Это отношеніе, по общему согласію, условились изображать греческою буквою π . И такъ, имѣемъ приблизительно

$$\text{По Архимеду:} \quad \pi = \frac{22}{7}$$

$$\text{По Мецію:} \quad \pi = \frac{355}{113}$$

$$\text{До 10-ти десятъ знаковъ: } \pi = 3,1415926535...$$

Если время позволить, то воспитанники, для упражненія, могутъ сами заняться вычисленіемъ периметровъ двухъ 96-ти правильныхъ многоугольниковъ, и вывести найденное Архимедомъ число $\frac{22}{7}$. Но главное вниманіе должно обратить на то, чтобы они хорошо поняли объясненный выше способъ этого вывода. Необходимо также упражнять ихъ въ численныхъ примѣрахъ, относящихся къ опредѣленію приближенной длины окружности и какой ни есть ея части, по данному радіусу, и обратно, радіуса, по данной окружности.

ОТДѢЛЪ VII.

ИЗМѢРЕНІЕ И СРАВНЕНІЕ ПЛОЩАДЕЙ МНОГОУГОЛЬНИКОВЪ И КРУГА.

28. Въ предъидущихъ Отдѣлахъ мы разсматривали различные виды многоугольниковъ, а также отношенія, существующія при нѣкоторыхъ условіяхъ, какъ между ихъ сторонами, такъ и между другими принадлежащими имъ линиями. Теперь остается намъ изслѣдовать свойства этихъ фигуръ въ разсужденіи *площадей*, ограниченныхъ ихъ сторонами, и показать, какимъ образомъ самыя площади измѣряются; эти изслѣдованія составляютъ предметъ *Планиметріи*.

Подъ площадью какой ни есть фигуры разумѣютъ часть плоской поверхности, заключающейся между линіями, которыя ограничиваютъ фигуру.

Преподаватель показавъ простыми построеніями, что площади фигуръ, различныхъ по виду, могутъ быть равны между собою, условится въ названіи *фигуръ равномѣрныхъ*, то есть такихъ, которыя имѣютъ площади равныя. Далѣе, объяснивъ значеніе наименованій: *основаніе* и *высота* параллелограмма и треугольника, онъ докажетъ слѣдующія два предложенія, придерживаясь, на примѣръ, изложенія *Лександра*:

Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся между собой какъ ихъ высоты.

Предл. 81.

Площади двухъ прямоугольниковъ, имѣющихъ какія ни есть основанія и высоты, относятся между собой какъ произведенія ихъ оснований на высоты.

Предл. 82.

Само собой разумѣется, что *предложеніе 81* должно быть доказано, какъ для оснований соизмѣримыхъ, такъ и несоизмѣримыхъ между собой.

Доказавъ *предложеніе 82*, надобно тщательно объяснить смыслъ выраженія: *умножить одну линію на другую*. Такъ, подъ *произведеніемъ основанія на высоту* прямоугольника должно разумѣть произведеніе отвлеченнаго числа, выражающаго сколько разъ *единичная*, впрочемъ произвольная *длина*, заключается въ основаніи этого прямоугольника, на отвлеченное число такихъ же единицъ, содержащихся въ высотѣ той же фигуры.

Для измѣренія площади какой ни есть плоской фигуры, на примѣръ прямоугольника, надлежитъ, сообразно съ общимъ понятіемъ объ измѣреніи величинъ, избрать *единичную площадь*, и потомъ, чрезъ послѣдовательное наложеніе ея на данную, или инымъ образомъ, опредѣлить, сколько разъ эта единичная площадь содержится въ измѣряемой. Тогда, по найденному отвлеченному числу, будетъ ли оно соизмѣримое или нѣтъ, приобрѣтемъ точное понятіе о величинѣ измѣряемой площади.

Единичная площадь, какъ по виду такъ и по величинѣ своей, можетъ быть произвольная. Самый простой видъ ея былъ бы *равносторонній треугольникъ*; но нашли болѣе удобнымъ употреблять *квадратъ* по причинѣ легкости, съ которой равныя квадратныя фигуры укладываются однѣ возлѣ другихъ, не оставляя между собою никакихъ промежутковъ. Послѣ этихъ объясненій, которыя полезно сопровождать наглядными примѣрами, можно уже перейти къ доказательству слѣдующаго основнаго предложенія:

Предл. 83. *Площадь прямоугольника равна произведенію изъ его основанія на высоту.*

Это произведеніе изображаетъ, какъ уже сказано выше, *отвлеченное число*; но какъ оно принимается здѣсь за *мѣру площади*, то и будетъ означать число *квадратныхъ единичныхъ площадей*, помѣщающихся въ разсматриваемой фигурѣ. Объяснимъ это подробнѣе.

Пусть будетъ S площадь прямоугольника $ABCD$, AB его

основаніе и AC его высота; положимъ также, что на линіи EF , равной *единичной длинѣ*, построенъ квадратъ $EFGH$. Если выразимъ линіи AB и AC въ частяхъ $EF=EG=1$ (Отдѣлъ II, № 8), то получимъ $AB=a \times EF$ и $AC=h \times EF$, гдѣ a и h будутъ означать извѣстныя *отвлеченныя числа*. Сравнимъ теперь площадь S прямоугольника $ABCD$ съ площадью s квадрата $EFGH$, который, очевидно, также, можетъ быть принятъ за прямоугольникъ, имѣющій высоту равную основанію. Въ силу *предложенія 82* получимъ

$$S : s = AB \times AC : EF \times EG;$$

наблюдая же, что $AB=a \times EF$, $AC=h \times EF$ и $EF=EG$, найдется изъ предъидущей пропорціи

$$S = a \times h \times s.$$

Слѣдовательно, площадь S прямоугольника $ABCD$ будетъ заключать въ себѣ столько квадратныхъ площадей s , сколько содержится отвлеченныхъ единицъ въ произведеніи двухъ чиселъ a и h . Напримѣръ, еслибъ AB было въ 4 раза, а AC въ $2\frac{1}{2}$ раза болѣе линейной единицы EF , то заключили бы, что S въ $4 \times 2\frac{1}{2} = 10$ разъ больше площади s квадрата $EFGH$. Наконецъ, принявъ площадь s квадрата $EFGH$, построеннаго на сторонѣ равной единицѣ, за *единичную площадь*, и допустивъ поэтому $s = 1$, получимъ просто $S = a \times h$, согласно съ смысломъ *предложенія 83*.

29. Два параллелограмма, имѣющіе равныя основанія и высоты, равномѣрны. Предл. 84.

Эта теорема, вмѣстѣ съ *предложеніями 81 и 82*, влечетъ за собою слѣдствія:

Площади двухъ параллелограмовъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся между собою какъ ихъ высоты. Предл. 85.

Площади двухъ параллелограмовъ, имѣющихъ какія ни есть основанія и высоты, относятся между собою какъ произведенія ихъ основаній на высоты. Предл. 86.

Далѣе, показавъ, что

Предл. 87. *Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, имѣющаго съ нимъ одно основаніе и высоту,*

Преподаватель, въ силу предложенія 83, выведетъ заключеніе:

Предл. 88. *Площадь треугольника равна его основанію, помноженному на половину высоты.*

Чтобы найти площадь какого ни есть многоугольника, разбиваютъ его на треугольники, площади которыхъ опредѣляются уже непосредственно на основаніи предл. 88. Такъ, на примѣръ, для трапеціи будетъ:

Предл. 89. *Площадь трапеціи равна полу-суммѣ параллельныхъ ея сторонъ, помноженной на разстояніе между ними.*

30. Показавъ, что площадь правильнаго многоугольника равна его периметру, умноженному на половину апотемы, должно будетъ замѣтить, что это правило справедливо, какъ бы велико не было число сторонъ разсматриваемаго многоугольника. Слѣдовательно, принявъ круговую линію за правильный многоугольникъ, состоящій изъ безконечнаго числа неизмѣримо-малыхъ сторонъ, окажется, что *площадь круга равна произведенію его окружности на половину радіуса*. Означивъ чрезъ R радіусъ разсматриваемаго круга, получимъ слѣдующія приближенныя величины для его площади:

$$\text{По Архимеду: } \frac{22}{7} \times R^2,$$

$$\text{По Мецію: } \frac{355}{113} \times R^2.$$

Отношеніе окружности къ діаметру условились означать буквою π ; поэтому площадь круга изобразится чрезъ πR^2 .

Площадь сектора равна произведенію дуги его на половину радіуса.

Такъ какъ секторъ состоитъ изъ сегмента и треугольника,

то вычтя изъ площади сектора площадь треугольника, получимъ *площадь сегмента*.

Само собой разумѣется, что при подобныхъ измѣреніяхъ, дуга непременно должна быть выражена въ тѣхъ же самыхъ единицахъ какъ радіусъ.

Говоря о площади круга, Преподаватель упомянетъ о *квадратурѣ круга*, какъ о задачѣ невозможной, состоящей въ *опредѣленіи, посредствомъ циркуля и линейки, стороны квадрата, равномѣрнаго съ даннымъ кругомъ*. Основываясь на мѣрѣ π . R^2 площади круга, выведенной выше, онъ замѣтитъ, что сторона искомаго квадрата изобразить среднюю пропорціональную линію между полуокружностію и ея радіусомъ. Поэтому, еслибы возможно было найти *геометрически* прямую линію, равную полуокружности даннаго круга, то задача о квадратурѣ рѣшалась бы очень просто (Отдѣлъ VI, № 22). Но такое спрямленіе, въ строгомъ смыслѣ, не можетъ быть найдено, и искать его значить искать невозможнаго. Подобнаго рода невозможности встрѣчаются и въ другихъ случаяхъ. Напримѣръ, еслибы искали такое ариѳметическое дробное число, котораго квадратъ равенъ 2, то доказали бы весьма простымъ образомъ, что подобнаго числа не можетъ быть; это самое навело бы насъ на понятіе о *числахъ ирраціональныхъ*. Почти то же имѣетъ мѣсто и съ отношеніемъ окружности къ діаметру: разница состоитъ только въ томъ, что это отношеніе не просто ирраціональное, какъ выше, а число особеннаго рода, принадлежащее къ разряду такъ называемыхъ математиками *чиселъ трансцендентныхъ*, которыя не могутъ быть выражены ни посредствомъ ариѳметическихъ чиселъ, ни помощію ирраціональныхъ.

Въ заключеніе Преподаватель замѣтитъ, что еслибы даже *точное геометрическое спрямленіе окружности* и было возможно, то это не повело бы насъ рѣшительно ни къ какому полезному приложенію, потому что упоминаемое спрямленіе

произведено посредством вычисления съ такимъ приближеніемъ, которое далеко превосходитъ всѣ требованія практики. И такъ, занимающіеся рѣшеніемъ задачи о квадратурѣ круга, съ одной стороны теряютъ время, а съ другой, изобличаютъ свое незнаніе наукъ математическихъ. Это замѣчаніе равно относится къ задачамъ: о раздѣленіи угла на три равныя части, объ удвоеніи куба и другимъ подобнымъ. Мы считаемъ необходимымъ для Преподавателей настаивать на сдѣланныхъ нами замѣчаніяхъ, чтобъ отклонить воспитанниковъ отъ попытокъ, къ которымъ нѣкоторые легко пристращаются, теряя на нихъ время, столь необходимое для приобрѣтенія полезныхъ знаній.

31. Доказавъ предварительно, что площади подобныхъ треугольниковъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ сторонъ, Преподаватель распространить это предложеніе на какіе ни есть подобные многоугольники, разбивъ ихъ на треугольники, которые также будутъ подобны (Предл. 67). И такъ

Предл. 91. Площади подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ квадраты сходственныхъ ихъ сторонъ, или другихъ сходственныхъ линий.

Отсюда выведемъ слѣдствія:

Предл. 92. Площади правильныхъ подобныхъ многоугольниковъ относятся между собою какъ квадраты радиусовъ, вписанныхъ или описанныхъ около нихъ окружностей.

Предл. 93. Площади круговъ пропорціональны квадратамъ ихъ радиусовъ.

Преподаватель докажетъ Пифагорову теорему (См. для сличенія Отдѣлъ V, № 15) какъ Эвклидъ, то есть, разбивъ квадратъ, построенный на гипотенузѣ, на два прямоугольника, соответственно равномѣрные съ квадратами, построенными на двухъ катетахъ, и замѣтитъ, что это предложеніе открыто

Пифагоромъ, однимъ изъ древнѣйшихъ Греческихъ математиковъ, жившимъ за 600 лѣтъ до Р. Х. Потомъ, въ силу предл. 91, онъ выведетъ слѣдующую, болѣе общую теорему:

Площадь какой ни есть фигуры, построенной на гипотенузѣ, равна суммѣ площадей подобныхъ ей фигуръ, построенныхъ на катетахъ. Предл. 94.

Основываясь на этой теоремѣ, и замѣтивъ, что всѣ полукружности могутъ быть принимаемы за подобныя фигуры, выводится непосредственно предложеніе о Гиппократовыхъ лункахъ, тѣмъ примѣчательное, что въ слѣдствіе его, площадь, ограниченная двумя круговыми дугами, равномѣрна съ площадью прямолинейной фигуры, именно съ площадью треугольника. Гиппократъ Хиосскій, предложившій эту теорему, былъ знаменитый Греческій геометръ, жившій за 450 лѣтъ до Р. Х.

32. Предметъ этого параграфа состоитъ въ доказательствѣ слѣдующихъ двухъ предложеній:

Во всякомъ треугольникѣ ABC квадратъ стороны AB, лежащей противъ остраго угла C, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ BC и AC, безъ удвоеннаго прямоугольника, построеннаго на сторонѣ BC и линіи CD, заключающейся между вершиною угла C и основаніемъ D перпендикуляра, опущеннаго изъ A на сторону BC. И такъ, будетъ Предл. 95.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \overline{BC} \times \overline{CD}.$$

Во всякомъ треугольникѣ ABC квадратъ стороны AB, лежащей противъ тупаго угла C, равенъ суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ BC и AC, сложенной съ удвоеннымъ прямоугольникомъ, построеннымъ на сторонѣ BC и линіи CD, заключающейся между вершиною угла C и основаніемъ D перпендикуляра, опущеннаго изъ A на сторону BC. И такъ, будетъ Предл. 96.

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 + 2 \overline{BC} \times \overline{CD}.$$

О Т Д Ъ Л Ъ VIII.

Задачи, относящіяся къ вычисленію площадей.

Для примѣненія пройденнаго къ практикѣ, а равно для того, чтобъ ознакомить воспитанниковъ съ графическими приѣмами Геометріи и съ употребленіемъ инструментовъ, необходимо упражнять ихъ, по мѣрѣ возможности, рѣшеніемъ разныхъ задачъ, относящихся къ VII Отдѣлу, и преимущественно слѣдующихъ, вошедшихъ въ Программу:

33. Данный многоугольникъ обратить въ другой, равно-мѣрный съ нимъ, и имѣющій меньшее число сторонъ. Обратитъ многоугольникъ въ равномѣрный съ нимъ квадратъ. Найти площадь многоугольника помощію масштаба.

34. Найти, съ требуемою точностію, радіусъ круга, имѣющаго данную площадь. Найти радіусъ круга, котораго площадь равна суммѣ или разности площадей двухъ данныхъ круговъ.

35. Найти по приближенію площадь криволинейной фигуры.

Фиг. 28. Способъ трапецій. Пусть будетъ $ACMDB$ площадь криволинейнаго сегмента, ограниченнаго кривою линіею CMD , прямою AB и двумя перпендикулярами AC и BD къ линіи AB . Раздѣляемъ прямую AB на нѣсколько равныхъ частей $Ar, pr', p'B$ (на чертежѣ на три); чѣмъ размыты фигуры будутъ значительнѣе, и чѣмъ требуется большая точность при опредѣленіи ея площади P , тѣмъ эти части должны быть меньше. Изъ точекъ дѣленія p, p' возставаемъ перпендикуляры $pm, p'm'$; при достаточномъ сближеніи прямыхъ $AC, pm, p'm', BD$, дуги $Cm, mm', m'D$ будутъ мало разнство-

вать отъ соотвѣтственныхъ имъ хордъ $Cm, mm', m'D$, и тогда, за площадь P , можно принять по приближенію сумму P' площадей трапецій $ACmp, pmm'p', p'm'DB$. Слѣдовательно, положивъ $Ar=pp'=p'D=a$, получимъ

$$P' = \frac{AC+mp}{2} \times a + \frac{pm+p'm'}{2} \times a + \frac{p'm'+BD}{2} \times a,$$

или

$$P' = a \times \left(\frac{AC+BD}{2} + pm + p'm' \right).$$

И такъ, для опредѣленія площади криволинейнаго сегмента, основаніе его раздѣляютъ на равныя части, и изъ точекъ дѣленія возставаютъ перпендикуляры къ нему; потомъ берутъ полу-сумму двухъ крайнихъ перпендикуляровъ, и придаютъ къ ней сумму всѣхъ среднихъ. Произведеніе найденной полной суммы на длину одной изъ равныхъ частей, опредѣлитъ, по приближенію, искомую площадь.

Способъ прямоугольниковъ. Каждую изъ прежнихъ частей $Ar, pr', p'B$ раздѣляемъ по-поламъ, и изъ точекъ дѣленія q, q', q'' возставаемъ перпендикуляры $qn, q'n', q''n''$. Потомъ вычисляемъ площади прямоугольниковъ $AEFp, pE'F'p', p'E''F''B$. Сумма этихъ площадей, которую означимъ чрезъ P'' , изобразитъ, приблизительно, искомую площадь P криволинейнаго сегмента. И такъ

$$P'' = a \times (qn + q'n' + q''n'').$$

Это выраженіе опредѣляетъ P точнѣе, чѣмъ предыдущее, вычисленное посредствомъ трапецій.

Основываясь на Высшемъ Анализѣ, можно доказать, что средняя величина $\frac{2P''+P'}{3}$ еще съ бѣльшею точностію изобразитъ площадь P криволинейнаго сегмента. Вычисливъ эту величину, получимъ

$$P = \frac{2P'' + P'}{3} = \frac{a}{3} \times \left(\frac{1}{2} AC + 2qn + pm + 2q'n' + p'm' + 2q''n'' + \frac{1}{2} BD \right);$$

принявъ же $Ap = a = 2b$, найдется

$$P = \frac{b}{3} \times (AC + 4qn + 2pm + 4q'n' + 2p'm' + 4q''n'' + BD),$$

въ чёмъ и состоитъ *Симпсона теорема*, имѣющая многія приложения, преимущественно въ Практической Механикѣ.

Послѣ этихъ подробностей Преподаватель покажетъ какимъ образомъ опредѣляется, по приближенію, площадь какой ни есть криволинейной фигуры чрезъ предварительное разложеніе ея на сегменты.

Этими упражненіями кончится курсъ 2-го года. Если позволить время, то очень полезно сдѣлать краткій обзоръ всего пройденнаго изъ Геометріи, не останавливаясь на подробностяхъ, но излагая сущность главныхъ предметовъ науки, и обозначая послѣдовательные переходы отъ одного Отдѣла къ другому по Конспекту.

=

ТРЕТІЙ ГОДЪ.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

ОТДѢЛЪ IX.

ПРЯМЫЯ ЛІНІИ И ПЛОСКОСТИ, РАЗСМАТРИВАЕМЫЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

Курсъ 3-го года Преподаватель начнетъ обзорѣмъ существенныхъ статей, составляющихъ предметъ Плоской Геометріи. При такомъ перечнѣ; онъ долженъ преимущественно обратить вниманіе воспитанниковъ на главные основанія, или, такъ сказать, на точки опоры Начальной Геометріи. Онъ покажетъ, что всѣ геометрическія истины, пройденныя въ первые два года, основаны на немногихъ началахъ, къ которымъ, прежде всего, должно отнести *предварительныя понятія о пространствѣ и о трехъ родахъ протяженій; понятіе о прямой линіи, о плоскости и о первоначальныхъ ихъ свойствахъ*. Далѣе, совокупленіе прямыхъ на плоскости приведетъ естественнымъ образомъ къ разсматриванію *угловъ, линій наклонныхъ и перпендикулярныхъ къ другимъ* и наконецъ къ *линіямъ параллельнымъ*. *Теорія параллельныхъ линій*, неоспоримо, есть важнѣйшая въ Геометріи; на ней основываются всѣ дальнѣйшія изслѣдованія. Изъ нея выводится *теорія пропорціональныхъ линій*, не менѣе плодovitая, которая доставляетъ способы для

сравненія и измѣренія линий и фигуръ, что собственно составляетъ предметъ Плоской Геометріи. На тѣхъ же самыхъ началахъ основана и *Геометрія въ пространствѣ*. При этомъ бѣгломъ обзорѣ должно также привести главные предложенія, относящіеся къ исчисленнымъ статьямъ, разумѣется безъ доказательства. Таковы напримѣръ *свойства параллельныхъ линий, равенство треугольниковъ, пропорціональность линий, измѣреніе и сравненіе площадей*.

Приведа такимъ образомъ на память воспитанникамъ пройденное ими изъ Геометріи въ первые два учебные года, Преподаватель перейдетъ къ прямому предмету курса, къ *начальнымъ основаніямъ Геометріи въ пространствѣ, которая имѣетъ предметомъ изслѣдованіе различныхъ совокупленій прямыхъ линий и плоскостей въ пространствѣ, также сравненіе и измѣреніе геометрическихъ тѣлъ*.

1. Повторивъ сказанное о плоскости въ Введеніи (*Опред. 5, Предлож. 6, 7 и 8*), Преподаватель дополнитъ эти объясненія слѣдующими предложеніями:

Предл. 97. *Двѣ параллельныя линии опредѣляютъ положеніе плоскости.*

Предл. 98. *Прямая линия или вся лежитъ на плоскости, или пересѣкаетъ ее въ одной точкѣ, или параллельна ей. Точку пересѣченія называютъ въ такомъ случаѣ основаніемъ прямой.*

Предл. 99. *Общее пересѣченіе двухъ плоскостей есть прямая линия.*

Въ самомъ дѣлѣ, если бы предположили, что изъ числа точекъ, общихъ обѣимъ плоскостямъ, три не находятся на одной и той же прямой линіи, то отсюда слѣдовало бы заключить, противно предположенію, что рассматриваемыя двѣ плоскости сливаются въ одну, ибо каждая изъ нихъ проходила бы чрезъ однѣ и тѣ же точки (*Введеніе, Предл. 7*).

Предл. 100. *Общее пересѣченіе трехъ плоскостей вообще есть точка, но можетъ быть и прямая линия.*

Такъ какъ двѣ плоскости пересѣкаются по прямой, то должно искать пересѣченіе прямой съ плоскостію, которое вообще будетъ точкою, или, въ частномъ случаѣ, *прямую линію*, и тогда послѣдняя будетъ принадлежать всѣмъ тремъ плоскостямъ (*Предл. 98*).

Замѣтимъ теперь, что чрезъ прямую линію можно провести безчисленное множество различныхъ плоскостей, и что эта прямая будетъ общимъ ихъ пересѣченіемъ. Сверхъ того, такъ какъ изъ всякой точки, взятой на упоминаемой линіи, можно возставить къ ней одинъ перпендикуляръ въ каждой изъ плоскостей, о которыхъ говоримъ, то отсюда заключаемъ, что *прямая въ пространствѣ допускаетъ безчисленное множество перпендикуляровъ въ каждой изъ своихъ точекъ*; но всѣ эти перпендикуляры проведены въ различныхъ плоскостяхъ.

Если, въ двухъ точкахъ прямой, вообразимъ два перпендикуляра къ ней въ различныхъ плоскостяхъ, то получимъ двѣ линіи, которыя очевидно не встрѣтятся, и, вмѣстѣ съ тѣмъ, не будутъ параллельны между собою, потому что не находятся въ одной плоскости. Такимъ образомъ *прямая въ пространствѣ могутъ не пересѣкаться, и быть между тѣмъ не параллельными*.

Прямолинейныя фигуры, которыя не лежатъ всѣми своими сторонами на одной плоскости, называются *косыми многоугольниками*. Простѣйшая изъ нихъ, сомкнутая, есть очевидно *косой четырехугольникъ*.

2. Мы сей-часъ упомянули о безчисленномъ множествѣ перпендикуляровъ къ прямой линіи, возставленныхъ изъ одной и той же ея точки, но въ различныхъ плоскостяхъ; всѣ эти перпендикуляры находятся въ одной плоскости, которая, конечно, не проходитъ чрезъ рассматриваемую прямую. И такъ

Всѣ перпендикуляры къ прямой въ какой ни есть ея точкѣ, находятся въ одной плоскости. Предл. 101.

Это основное предположение, важнейшее въ настоящемъ Отдѣлѣ, доказывается очень просто слѣдующимъ образомъ: пусть будетъ прямая АВ; проведемъ чрезъ нее двѣ плоскости, и въ каждой изъ нихъ возставимъ перпендикуляръ къ АВ въ какой ни есть ея точкѣ О. Эти два перпендикуляра ОС и OD, какъ линіи пересѣкающіяся въ О, опредѣляютъ плоскость Р, въ которой непременно будутъ заключаться и всѣ прямая, проходящая чрезъ О перпендикулярно къ АВ. Дѣйствительно, сверхъ проведенныхъ сей-часъ чрезъ линію АВ двухъ плоскостей, которыя, для краткости, назовемъ буквами α и β , вообразимъ третью плоскость γ , проходящую чрезъ ту же прямую АВ, но впрочемъ совершенно произвольную. Слѣдуетъ доказать, что перпендикуляръ къ АВ, возставленный изъ точки О въ плоскости γ , будетъ находиться въ то же время и въ плоскости Р, или что всё равно, совпадетъ съ общимъ пересѣченіемъ двухъ плоскостей Р и γ . Означимъ на чертежѣ это общее пересѣченіе Р съ γ чрезъ ОЕ; такимъ образомъ три линіи ОС, OD и ОЕ будутъ находиться въ одной плоскости Р. Соединимъ точку С съ точкою Е прямою СЕ, которая, если нужно продолженная, необходимо встрѣтитъ линію OD, напимѣръ въ точкѣ D. Отложимъ потомъ на прямой АВ, по обѣ стороны О, произвольныя, но равныя части ОА и OB, и проведемъ прямыя АС, AD, AE, ВС, BD, BE.

Чтобы не различать между собою случаевъ, когда пересѣченіе плоскостей Р и γ лежитъ между двумя перпендикулярами ОС и OD къ АВ, или внѣ ихъ, какъ представлено на чертежѣ, назовемъ ту изъ точекъ D или E, которая принадлежитъ перпендикуляру, буквою F, а точку, лежащую на пересѣченіи Р съ γ , буквою G.

Такъ какъ треугольники АСF и ВСF имѣютъ стороны АС=BC, AF=BF и бокъ CF общій, то они равны между собой; слѣдовательно углы ихъ при С одинаковы. Равенство же уг-

ловъ при С влечетъ за собою и равенство треугольниковъ АСG и ВСG, потому что стороны ихъ, между которыми заключаются равныя углы при С, соответственно равны, почему и $AG=BG$. Изъ этого послѣдняго равенства непосредственно заключаемъ, что линія OG перпендикулярна къ АВ, согласно съ тѣмъ что имѣли въ виду доказать *).

И такъ плоскость Р, заключающая два перпендикуляра къ прямой АВ, возставленные изъ О, будетъ заключать и всѣ перпендикуляры къ ней, проведенные въ этой самой точкѣ. Такую плоскость называютъ перпендикулярною къ линіи АВ въ точкѣ О, а прямую АВ, перпендикуляромъ къ плоскости Р въ той же точкѣ.

Очевидно, что всякая прямая, проведенная чрезъ точку О въ плоскости Р, перпендикулярной къ линіи АВ, будетъ сама перпендикулярна къ АВ, ибо проведенную прямую можно принимать за пересѣченіе проходящей чрезъ нее и чрезъ АВ плоскости съ плоскостію Р.

Чтобы прямая была перпендикулярна къ плоскости въ точкѣ О, сама плоскость необходимо должна быть перпендикулярна къ этой прямой, и слѣдовательно должна содержать два перпендикуляра къ ней, проходящихъ чрезъ О. И такъ, *прямая будетъ перпендикулярна къ плоскости въ точкѣ О, когда будетъ перпендикулярна къ двумъ прямымъ, проведеннымъ чрезъ О въ разсматриваемой плоскости.*

Изъ сказаннаго усматриваемъ также, что въ каждой точкѣ прямой линіи будетъ всегда перпендикулярная къ ней плоскость, и при томъ только одна. Въ самомъ дѣлѣ ясно, что не можетъ быть различныхъ плоскостей, содержащихъ всѣ перпендикуляры къ прямой въ одной ея точкѣ. И на оборотъ: изъ

(*) Это остроумное доказательство сообщено мнѣ Академикомъ М. В. Остроградскимъ.

каждой точки O плоскости P можно возставить къ ней перпендикуляръ. Для доказательства, проведемъ чрезъ точку O въ плоскости P произвольную прямую D , и вообразимъ перпендикулярную къ ней плоскость P' , проходящую чрезъ ту же точку O . Прямая, проведенная чрезъ O въ плоскости P' перпендикулярно къ пересѣченію плоскостей P' и P , будетъ требуемый перпендикуляръ. Дѣйствительно, такъ какъ эта прямая перпендикулярна и къ линіи D , потому что находится въ плоскости P' перпендикулярной къ ней, и къ пересѣченію P' съ P , то и будетъ перпендикулярна къ двумъ линіямъ, лежащимъ въ плоскости P .

Изъ точки O , взятой на плоскости P , можно возставить къ ней только одинъ перпендикуляръ.

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ могли быть два перпендикуляра, то проведя чрезъ нихъ плоскость, на примѣръ P' , оказалось бы, что каждый изъ нихъ перпендикуляренъ къ общему пересѣченію двухъ плоскостей P' и P , что невозможно.

Изъ предложенія 101 выводимъ слѣдствія:

- 1°. Перпендикуляръ къ плоскости короче всякой наклонной, почему онъ и служитъ мѣрою разстоянія точки отъ плоскости.
- 2°. Наклонныя къ плоскости, равноудаленныя отъ основанія перпендикуляра, равны между собою; изъ наклонныхъ же неравноудаленныхъ, та длиннѣе, которая отстоитъ далѣе отъ этого основанія.

3. Всякая линія, параллельная перпендикуляру къ плоскости, будетъ также перпендикулярна къ этой плоскости, и обратно.

Отсюда проистекаетъ слѣдствіе: двѣ линіи, параллельныя третьей, параллельны между собой, хотя бы эти три прямые и не находились въ одной плоскости.

Изъ точки C , вѣтъ плоскости P , можно опустить на послѣд-

нюю одинъ только перпендикуляръ. Дѣйствительно, вообразимъ, что изъ какой ни есть точки O плоскости P возставленъ къ ней перпендикуляръ OA ; проведемъ чрезъ данную точку C линію CB , параллельную OA , разумѣя подъ B точку встрѣчи прямой CB съ плоскостію P . Эта прямая CB будетъ перпендикулярна къ P . Другаго перпендикуляра CD быть не можетъ, ибо онъ долженъ быть параллеленъ найденному CB , и между тѣмъ проходить чрезъ общую съ нимъ точку C . Или, иначе: допустивъ существованіе этого новаго перпендикуляра, и соединивъ B съ D , мы получили бы треугольникъ CBD , имѣющій два прямые угла при B и при D , что очевидно невозможно.

4. Условясь въ смыслѣ линій и плоскостей параллельныхъ данной плоскости, Преподаватель перейдетъ къ доказательству слѣдующихъ предложеній, указывая на ихъ сходство съ теоремами № № 4 и 5 (Отдѣлъ I):

Прямая, параллельная другой прямой, проведенной въ нѣ которой плоскости, будетъ параллельна этой самой плоскости. Предл. 103.

Двѣ плоскости, перпендикулярныя къ одной прямой, параллельны между собой. Предл. 104.

Прямые пересѣченія двухъ параллельныхъ плоскостей третьей, параллельны между собой. Предл. 105.

Прямая, перпендикулярная къ одной изъ двухъ плоскостей взаимно-параллельныхъ, будетъ перпендикулярна и къ другой. Предл. 106.

5. Части параллельныхъ линій, заключающіяся между двумя параллельными плоскостями, равны между собой. Отсюда слѣдуетъ, что двѣ параллельныя плоскости во всякъ точкахъ равно отстоятъ одна отъ другой. Изъ того же предложенія заключаемъ, что чрезъ опредѣленную точку можно провести только одну плоскость, параллельную другой.

Когда стороны двухъ угловъ, лежащихъ въ разныхъ плоскостяхъ, соответственно параллельны и направлены въ одну

Предл. 108. сторону, то эти два угла равны между собою, а плоскости их взаимно параллельны.

Слѣдствіе. Если двѣ параллельныя плоскости пересѣкутся двумя другими плоскостями, образующими углы на двухъ первыхъ, то эти углы будутъ равны между собою.

Предл. 109. Части двухъ прямыхъ линій, отсѣкаемыя тремя параллельными плоскостями, пропорціональны между собой.

Опред. 110. **6.** Двуграннымъ угломъ называется совокупленіе двухъ встрѣчающихся плоскостей, ограниченныхъ при линіи общаго ихъ пересѣченія.

Прямая пересѣченія называется ребромъ угла, а двѣ плоскости, его гранями или сторонами. Условясь въ обозначеніи двуграннаго угла четырьмя буквами, Преподаватель докажетъ равенство линейныхъ угловъ, составляемыхъ перпендикулярами къ общему пересѣченію, проведенными въ каждой грани. Отсюда онъ заключить, что когда два двугранные угла имѣютъ одинъ и тотъ же линейный уголъ между перпендикулярами, то они равны между собою.

Уголъ, составляемый двумя перпендикулярами къ ребру, проведенными въ каждой грани, называется угломъ наклоненія, и служить мѣрою двуграннаго угла. Когда этотъ уголъ прямой, то грани или плоскости взаимно перпендикулярны.

Потомъ Преподаватель замѣтитъ, что двугранные углы имѣютъ тѣ же свойства, какъ и линейные, именно: при пересѣченіи двухъ плоскостей, противоположные углы равны между собою, а смежные составляютъ вмѣстѣ два прямые угла; всѣ прямые двугранные углы равны между собою; при пересѣченіи двухъ параллельныхъ плоскостей третьей плоскостію, между полученными двугранными углами будутъ существовать тѣ же самыя отношенія, какъ и между углами, которые происходятъ отъ пересѣченія прямою двухъ параллельныхъ линій. Далѣе, онъ перейдетъ къ доказательству слѣдующихъ предложеній:

Предл. 111. Всякая плоскость, проходящая чрезъ перпендикуляръ къ другой плоскости, перпендикулярна къ ней.

Предл. 112. Когда двѣ плоскости взаимно перпендикулярны, то всякій перпендикуляръ къ общему пересѣченію въ одной изъ нихъ, будетъ вмѣстѣ съ тѣмъ перпендикуляромъ и къ другой плоскости.

Предл. 113. Общее пересѣченіе двухъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ третьей, также перпендикулярно и къ послѣдней.

О Т Д Ъ Л Ъ X.

О многогранныхъ углахъ и о многогранникахъ.

Опред. 114. **7.** Многограннымъ угломъ называется совокупленіе трехъ или большаго числа плоскостей, встрѣчающихся въ одной точкѣ, и ограниченныхъ при ней. Преподаватель замѣтитъ, что трехгранный уголъ есть самый простой изъ многогранныхъ угловъ; потомъ, условясь въ наименованіяхъ вершина, ребры, грани, плоскіе и двугранные углы даннаго многограннаго угла, онъ докажетъ слѣдующія предложенія:

Предл. 115. Въ многогранномъ углу какой ни есть плоскій уголъ меньше суммы всѣхъ остальныхъ.

Доказавъ сперва это предложеніе обыкновеннымъ образомъ для трехграннаго угла, Преподаватель распространить теорему и на общій случай употребляя слѣдующій пріемъ:

Положимъ, напримѣръ, что разсматривается пятигранный уголъ ABCDEO, и требуется доказать, что уголъ AOE меньше суммы остальныхъ четырехъ угловъ

АОВ, ВОС, СОD и DОЕ.

Проведемъ плоскость чрезъ прямыя АО и СО; въ трехгранномъ углу ABCO получимъ

Фиг. 31.

уголъ $\text{AOC} < \text{угла AOB} + \text{уг. BOC}$.

Проведя плоскость AOD , найдемъ

уголъ $\text{AOD} < \text{уг. AOC} + \text{уг. COD}$.

Наконецъ

уголъ $\text{AOE} < \text{уг. AOD} + \text{уг. DOE}$.

Сложивъ эти три неравенства, получимъ по сокращеніи

уголъ $\text{AOE} < \text{уг. AOB} + \text{уг. BOC} + \text{уг. COD} + \text{уг. DOE}$.

Предл. 116. *Во всякомъ многогранномъ углу, съ углами исходящими, сумма всѣхъ плоскихъ угловъ меньше четырехъ прямыхъ.*

Предл. 117. *Трегранные углы равны между собою, когда составлены изъ взаимно-равныхъ и одинаковымъ образомъ расположенныхъ плоскихъ угловъ.*

Фиг. 32. Доказательство этого предложенія можно изложить, для простоты, слѣдующимъ образомъ: пусть данные три плоскіе угла, составляющіе каждый изъ двухъ данныхъ трегранныхъ угловъ, будутъ AOB , BOC и COD . Положимъ сперва, что всѣ три находятся въ одной плоскости. Отложимъ отъ точки O на прямыхъ OA и OD произвольныя равныя части OL и OM , и изъ точекъ L и M опустимъ перпендикуляры LP и MQ на стороны OB и OC угла BOC . Положимъ теперь, что грань COD обращаемъ около OC , пока она не совмѣстится съ плоскостію BOC , и не приметъ положенія COD' ; то же самое дѣлаемъ съ гранью AOB , обращая ея около стороны OB , пока она не приметъ положенія BOA' . Въ силу предложенія 115 линія OA' будетъ непременно ближе къ OC чѣмъ OD' ; поэтому, во время движенія, двѣ стороны OD и OA , или OD' и OA' , перешли одна за другую, и при переходѣ, кромѣ точки O , имѣли еще другую общую точку, на примѣръ L и M ; слѣдовательно онѣ сливались въ одну линію, изображающую третье ребро треграннаго угла. Такъ какъ при одинаковомъ расположеніи плоскихъ угловъ въ двухъ трегранныхъ углахъ, совмѣщеніе сторонъ OD и OA можетъ произойти только одинъ разъ во

время движенія, то и заключаемъ, что трегранный уголъ вполне опредѣляется приведенными выше условіями.

Предл. 118. *Когда въ одномъ трегранномъ углу два линейные угла и взаимное ихъ наклоненіе порознь равны тѣмъ же частямъ другого, и расположены одинаково въ обоихъ, то эти два трегранные углы равны между собою.*

Это предложеніе доказывается очень простымъ образомъ показавъ, что при совмѣщеніи частей, по условію равныхъ между собой, остальные части двухъ трегранныхъ угловъ будутъ также порознь равны, и сверхъ того совмѣстятся.

8. Всякое совокупленіе плоскостей, ограничивающихъ часть пространства, называется многогранникомъ.

Раздѣленіе многогранниковъ по числу граней на *четырегранныки*, *пятигранники*, *шестигранники* и проч. *Ребра, грани, вершина, діагонали, діагональныя плоскости, плоскіе и двугранные углы* многогранника. Многогранникъ съ *исходящими* и *входящими* углами. Здѣсь будутъ разсматриваться только первые.

Самое опредѣленіе многогранниковъ приводитъ къ заключенію, что простѣйшій изъ нихъ, по числу граней, есть *четырегранныкъ* или *тетраэдръ*, имѣющій относительно геометрическихъ тѣлъ такое же значеніе, какъ треугольникъ въ разсужденіи прямолинейныхъ фигуръ. Вслѣдъ за этимъ Преподаватель укажетъ на *правильный тетраэдръ* или *правильный четырехгранникъ*, и объяснитъ другіе виды многогранниковъ, именно: *пирамиду* съ раздѣленіемъ ея на *треугольную*, *четыреугольную*, *пятиугольную* и проч.; *пирамиду правильную* и *неправильную*, *усѣченную* плоскостію параллельною ея основанію; *призму прямую* и *наклонную*; *призму усѣченную*. Потомъ исчислить различныя виды призмъ, какъ то: *параллелепипедъ*, *прямоугольный параллелепипедъ*, *кубъ* или *правильный шестигранникъ*, указывая вмѣстѣ съ тѣмъ на свойства этихъ многогранниковъ относительно равенства извѣстныхъ ихъ частей.

Равнымъ образомъ онъ покажетъ и построение всѣхъ поименованныхъ выше многогранниковъ.

Определение поверхности какого ни есть многогранника не требуетъ никакихъ новыхъ предложеній. Найдя по правиламъ, изложеннымъ въ Отдѣлѣ VII, площадь каждой его грани, и сложивъ потомъ всѣ эти площади, найдется искомая поверхность. Преподаватель покажетъ, что для правильныхъ пирамидъ и вообще для правильныхъ многогранниковъ, а также для призмъ, определение поверхностей можетъ быть упрощено. Нѣсколько численныхъ примѣровъ опредѣленія поверхностей многогранниковъ объяснить сказанное самымъ удовлетворительнымъ образомъ.

Два многогранника равны между собою, когда всѣ грани одного соответственно равны гранямъ другого, одинаково расположены въ обоихъ, и равно наклонены одна къ другой.

Для простоты, нѣтъ надобности разбирать, какія изъ приведенныхъ условій будутъ лишними *). Достаточно замѣтить, что для призмъ и пирамидъ требованіе, относящееся къ равенству всѣхъ граней (вмѣсто трехъ) и взаимнаго наклоненія сторонъ, можетъ быть опущено. И такъ

Предл. 119.

Две призмъ или две пирамиды равны, когда грани, составляющія одинъ изъ трехъгранныхъ угловъ въ одной изъ нихъ, равны тѣмъ же частямъ въ другой, и при томъ одинаково расположены въ обоихъ.

Опред. 120.

Подобными многогранниками называются такіе, которыхъ сходственные грани подобны, расположены одинаковымъ образомъ, и составляютъ по-два другіе углы, соответственно равные въ разсматриваемыхъ многогранникахъ.

Къ этому опредѣленію относится то самое замѣчаніе, кото-

(*) Для сличенія, отсылаемъ къ статьѣ о подобныхъ многоугольникахъ (Отдѣлъ V, №№ 13 и 16).

рое сей-часъ сдѣлали въ разсужденіи равныхъ многогранниковъ. Такъ для подобія призмъ и пирамидъ число условій уменьшится, и получимъ слѣдующее предложеніе:

Две призмъ или пирамиды подобны между собой, когда грани, составляющія одинъ изъ трехъгранныхъ угловъ въ одной изъ нихъ, подобны тѣмъ же частямъ въ другой, и при томъ одинаково расположены въ обоихъ.

Предл. 121.

Вслѣдъ за этимъ надлежитъ доказатъ предложенія, относящіяся къ сравненію сходственныхъ площадей или поверхностей подобныхъ многогранниковъ.

Площади оснований двухъ подобныхъ призмъ или пирамидъ относятся между собой, какъ квадраты сходственныхъ реберъ, или какъ квадраты ихъ высотъ.

Предл. 122.

Разбивъ данные подобные многогранники на пирамиды, докажется теорема:

Площади сходственныхъ граней въ подобныхъ многогранникахъ относятся между собой, какъ квадраты сходственныхъ реберъ, или другихъ сходственныхъ же линій въ многогранникахъ.

Предл. 123.

9. Разсѣкая пирамиду плоскостію параллельною ея основанію, мы получимъ двѣ части: первая будетъ пирамида, подобная цѣлой, а другая часть, *пирамидальный отрѣзокъ* или *пирамида усѣченная*. Это послѣднее тѣло имѣетъ двѣ параллельныя грани, обыкновенно называемыя его *основаніями*; прочія суть трапеціи. Преподаватель докажетъ, что цѣлая пирамида и первая ея часть удовлетворяютъ условіямъ подобія, и что слѣдовательно ихъ сходственные ребра и высоты взаимно пропорціональны, а площади оснований относятся между собой какъ квадраты сходственныхъ реберъ, или какъ квадраты высотъ. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что въ двухъ пирамидахъ, имѣющихъ равномѣрные основанія и рав-

ныя высоты, площади сечений, равноотстоящія отъ вершины, а поэтому и отъ оснований, равны между собою.

Пусть будутъ соответственно A, H, K , площадь основанія, высота и одно изъ реберъ цѣлой пирамиды, а a, h, k , тѣ же самыя принадлежности первой ея части; полагая при томъ, что K и k суть ребра сходственныхъ, получимъ

$$\frac{H}{K} = \frac{h}{k}, \quad \frac{H^2}{A} = \frac{h^2}{a}, \quad \frac{K^2}{A} = \frac{k^2}{a},$$

или

$$\frac{H}{K} = \frac{h}{k}, \quad \frac{H}{\sqrt{A}} = \frac{h}{\sqrt{a}}, \quad \frac{K}{\sqrt{A}} = \frac{k}{\sqrt{a}},$$

или еще

$$\frac{H}{h} = \frac{K}{k} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{a}}.$$

Если изобразимъ чрезъ l высоту усѣченной пирамиды или пирамидальнаго отрѣзка, очевидно равную разности $H-h$, то выведемъ непосредственно равенства

$$\frac{H}{K} = \frac{h}{k} = \frac{l}{K-k},$$

$$\frac{H}{\sqrt{A}} = \frac{h}{\sqrt{a}} = \frac{l}{\sqrt{A}-\sqrt{a}},$$

изъ которыхъ найдется высота l отрѣзка чрезъ сходственные ребра и одну изъ высотъ H или h . Вообще, эти равенства послужатъ для опредѣленія двухъ изъ высотъ H, h, l , посредствомъ третьей и площадей основаній или сходственныхъ реберъ.

10. Подъ объѣмомъ многогранника, или вообще какого ни есть геометрическаго тѣла, разумѣютъ пространство, ограниченное поверхностью этого многогранника или тѣла. Когда тѣло есть пустой сосудъ, то названіе объѣма часто замѣняютъ наименованіемъ *емъстимости*. Тѣла, различныя по виду, очевидно могутъ быть равны по объѣму. Такое равенство мы бу-

демъ называть иногда *равноѣмностью тѣлъ по объѣму*, или, для сокращенія рѣчи, просто *равноѣмностью*.

Для измѣренія объѣма какого ни есть тѣла, надлежитъ, подобно съ общимъ понятіемъ объ измѣреніи величинъ, избрать *единичный объѣмъ*, и потомъ, чрезъ послѣдовательное наложеніе его внутри тѣла, опредѣлить сколько разъ этотъ единичный объѣмъ содержится въ измѣряемомъ. Тогда, по найденному отвѣченному числу, будетъ ли оно соизмѣримое или нѣтъ, приобрѣтемъ точное понятіе о величинѣ измѣряемаго объѣма.

Тѣло, принимаемое за *единичный объѣмъ*, какъ по виду такъ и по величинѣ своей, можетъ быть произвольное. Самый простой видъ его былъ бы *правильный четырехгранникъ* (*). Но нашли болѣе удобнымъ употреблять *правильный шестигранникъ* или *кубъ*, по причинѣ легкости, съ которою кубическія тѣла укладываются, не оставляя между собою никакихъ промежутковъ.

Послѣ этихъ объясненій, Преподаватель докажетъ обыкновеннымъ образомъ слѣдующія предложенія:

Объѣмы двухъ прямоугольных параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя основанія, относятся между собою какъ ихъ высоты.

Объѣмы двухъ прямоугольных параллелепипедовъ, имѣющихъ равныя высоты, относятся между собою какъ ихъ основанія.

Объѣмы двухъ какихъ ни есть прямоугольных параллелепипедовъ пропорціональны произведеніямъ изъ основанія на высоту въ каждомъ изъ нихъ.

Объѣмъ прямоугольнаго параллелепипеда равенъ произведенію изъ основанія на высоту, или произведенію трехъ его реберъ.

Предл. 124.

(*) Для сличенія, отсылаемъ къ Отдѣлу VII, № 28.

Выводя последнюю теорему, необходимо повторить сказанное въ № 28 (Отдѣлъ VII) о смыслѣ, въ которомъ должно разумѣть *произведение линий*, примѣняя изложенныя въ упоминаемомъ № объясненія къ *трѣмъ* перемножаемымъ линіямъ, или къ произведенію площади на линію.

Предл. 125. *Параллелепипеды, стоящіе на одномъ основаніи, и имѣющіе одинаковыя высоты, равномѣрны по объѣму.*

Для доказательства этой теоремы, надобно сравнить два параллелепипеда, удовлетворяющіе сказаннымъ условіямъ, и изъ которыхъ одинъ прямоугольный. Чтобы доказать равенство ихъ объѣмовъ, должно различить два случая: 1^о когда двѣ параллельныя грани одного параллелепипеда въ однѣхъ плоскостяхъ съ двумя гранями другаго; 2^о когда грани одного параллелепипеда расположены какъ ни есть въ разсужденіи граней другаго. Второй случай непосредственно приводится къ первому чрезъ разсмотрѣніе вспомогательнаго параллелепипеда.

Изъ предложеній 124 и 125 выведемъ слѣдующее заключеніе:

Предл. 126. *Объѣмъ какого ни есть параллелепипеда равенъ его основанію, умноженному на высоту.*

И такъ, объѣмъ куба изобразится *третьею степенью или кубомъ его ребра*. Здѣсь можно упомянуть о *задачѣ объ удвоеніи куба*, состоящей въ опредѣленіи стороны правильного шестигранника, котораго объѣмъ вдвое болѣе объѣма другаго, даннаго шестигранника. Объ этой задачѣ должно разумѣть то же самое, что замѣчено было о *квадратурѣ круга* и о *геометрическомъ раздѣленіи угла на три части* (Отдѣлъ VII, № 30).

Означивъ чрезъ S , h и V основаніе, высоту и объѣмъ одного параллелепипеда, а чрезъ S' , h' и V' тѣ же величины въ отношеніи къ другому, получимъ, въ силу предл. 126,

$$V = Sh \text{ и } V' = S'h';$$

слѣдовательно

$$\frac{V}{V'} = \frac{Sh}{S'h'}.$$

И такъ, объѣмы *двухъ какихъ ни есть параллелепипедовъ относятся между собою какъ произведение изъ основанія на высоту въ первомъ изъ нихъ къ подобному произведенію въ другомъ*. Предл. 127.

11. Прежде всего Преподаватель покажетъ, что объѣмъ *прямой трехгранной призмы равенъ половинѣ объѣма параллелепипеда, имѣющаго съ призмою одинаковую высоту, а основаніе вдвое большее*. Послѣ того онъ распространитъ это самое предложеніе на случай *трехгранной наклонной призмы*, заимствуя доказательство Г. Фурье изъ курса Геометріи Лакруа или Сирода. Наконецъ, разложеніе какой ни есть призмы на треугольныя, непосредственно приведетъ къ слѣдствію:

Объѣмъ какой ни есть многогранной призмы равенъ ея основанію, помноженному на высоту. Предл. 128.

Отсюда слѣдуетъ, что *объѣмы двухъ призмъ, при равномѣрныхъ основаніяхъ, относятся какъ ихъ высоты, а при равныхъ высотахъ, какъ ихъ основанія*, и вообще какъ *произведенія изъ основаній на высоты*.

Для сравненія объѣмовъ двухъ подобныхъ призмъ, замѣтимъ, что изобразивъ соответственно чрезъ V , A и H объѣмъ, основаніе и высоту одной изъ нихъ, а чрезъ v , a и h ; тѣ же величины другой, получимъ

$$V = A \times H, \quad v = a \times h;$$

но какъ съ другой стороны имѣемъ (Предл. 122)

$$\frac{A}{a} = \frac{H^2}{h^2},$$

то найдемъ

$$\frac{V}{v} = \frac{A.H}{a.h} = \frac{H^3}{h^3}.$$

Слѣдовательно: *объѣмы двухъ подобныхъ призмъ относятся между собой какъ кубы ихъ высотъ*.

По причинѣ подобія призмъ, отношеніе кубовъ высотъ можетъ быть замѣнено отношеніемъ кубовъ какихъ ни есть сходственныхъ въ нихъ линий.

Предл. 129.

Треугольная усѣченная призма разлагается на три тетраэдра, равноплотные по объѣму съ тремя другими, имѣющими общее основаніе съ призмой, а вершины, въ трехъ углахъ треугольника другого основанія.

Это предложеніе Преподаватель докажетъ обыкновеннымъ образомъ, при чемъ замѣтитъ, что показанное разложеніе вовсе не зависитъ отъ взаимнаго наклоненія плоскостей двухъ основаній призмы, которыя, поэтому, могутъ быть и параллельными между собой.

Выводъ объѣма многогранной призмы, основанный на способъ безконечно-малыхъ величинъ.

Предложимъ здѣсь, для любителей Геометріи, нѣкоторыя изслѣдованія объ объѣмѣ многогранной призмы, основанныя на способъ безконечно-малыхъ величинъ.

Фиг. 33.

Положимъ, что данную наклонную призму, которую, для простоты чертежа, примемъ треугольною, раздѣлили на безконечное множество слоевъ плоскостями, параллельными ея основанію. Доказавъ, что всѣ сѣченія будутъ равны основанію, и допустивъ сверхъ того, что безконечно-малыя разстоянія между всѣми пересѣкающимися плоскостями равны между собою, окажется, что и всѣ слоевыя также равны. Пусть будетъ $ABCabc$ одинъ изъ этихъ слоевъ, S площадь основанія ABC , а h неизмѣримо-малая высота am слоя, которая получится опустивъ перпендикуляръ на плоскость ABC изъ какой ни есть точки плоскости abc , напримѣръ изъ точки a . За объѣмъ слоя $ABCabc$ можно принять площадь его основанія ABC , помноженную на высоту am , то есть произведеніе $S \times h$. Дѣйствительно, если бы прямая призма, построенная на треугольникѣ ABC , и имѣющая высоту am , могла отличаться по объѣму своему отъ наклонной $ABCabc$, то развѣ только объѣмомъ тѣла, у котораго два измѣренія безконечно малы; а какъ объѣмъ $S \times h$ самой

призмы имѣетъ только одно измѣреніе h неизмѣримо-малое, то отсюда и слѣдуетъ, что объѣмы обоихъ слоевъ, прямого и наклоннаго, должно считать равными между собой (Отдѣлъ V, № 19). Повторивъ произведеніе $S \times h$ столько разъ, сколько h заключается въ высотѣ H данной наклонной призмы, получимъ окончательно для мѣры ея объѣма произведеніе $S \times H$, сообразно съ предложеніемъ 128.

Чтобы придать болѣе строгости приведенному сей-часъ доказательству, опустимъ изъ точекъ b и c (тотъ же чертежъ) перпендикуляры bn и cq , послѣ чего соединимъ прямыми основанія перпендикуляровъ m , n и q . Такимъ образомъ, вынеся чертежъ, получатся два пересѣкающіеся треугольника. Ясно, что одно изъ трехъ основаній m , n , q будетъ непременно находиться внутри треугольника ABC , какъ m на чертежѣ, и потому именно, что треугольникъ mnp равенъ треугольнику ABC , а разстоянія Am , Bn , Cq неизмѣримо малы. Соединивъ B съ n и C съ q , получится пятиугольникъ $ABnqC$, котораго площадь, по причинѣ неизмѣримо-малыхъ линий Bn и Cq , будетъ безконечно мало разнствовать отъ площади S треугольника ABC , и тѣмъ менѣе, чѣмъ h меньше. Изобразимъ площадь пятиугольника чрезъ $S + s$, разумѣя подъ s неизмѣримо-малую величину. Если теперь представимъ себѣ *прямую призму*, стоящую на основаніи $ABnqC$, и имѣющую высоту h , то объѣмъ ея, въ слѣдствіе сказаннаго выше, будетъ равенъ

Фиг. 34.

$$(S + s) \times h = S \times h + s \times h.$$

При томъ очевидно, что объѣмъ разсматриваемаго слоя $ABCabc$ меньше сей-часъ найденнаго объѣма, потому что первый заключается во второмъ.

Совершенно подобнымъ образомъ увидимъ, что площадь $mp'q'$ внутренней фигуры безконечно мало разнствуетъ, по недостатку, отъ площади S треугольника ABC . Означивъ чрезъ s' избытокъ площади треугольника ABC предъ площадью $mp'q'$, найдемъ для прямой призмы, построенной на основаніи $mp'q'$, и имѣющей ту же высоту h , выраженіе

$$(S - s') \times h = S \times h - s' \times h.$$

Ясно, что объѣмъ разсматриваемаго слоя $ABCabc$ будетъ *болѣе* найденнаго сей-часъ объѣма, такъ что

$$ABCabc > S \times h - s' \times h,$$

а съ другой стороны

$$ABCabc < S \times h + s \times h.$$

Если положимъ, что число всѣхъ слоевъ равно M , то $M \times ABCabc$ изобразитъ полный объёмъ V разсматриваемой призмы, и какъ произведение $M \times h$ равно полной ея высотѣ, которую изобразимъ чрезъ H , то умноживъ предыдущія неравенства на M , получимъ:

$$V < S \times H + s \times H$$

и

$$V > S \times H - s' \times H.$$

Теперь замѣтимъ, что принявъ общую высоту h слоевъ неизмѣримо-малою, s и s' будутъ также величины неизмѣримо-малыя; слѣдовательно и количества $s \times H$ и $s' \times H$ такого же свойства (Отдѣлъ V, № 19). И такъ, V можетъ отличаться отъ произведенія $S \times H$, по избытку или по недостатку, только безконечно-малою величиною, которую назовемъ i . Поэтому будемъ

$$S \times H - V = i$$

или

$$V - S \times H = i.$$

Но какъ V и $S \times H$ изображаютъ двѣ конечныя, постоянныя величины, то и разность ихъ будетъ постоянная, между тѣмъ какъ i есть величина мѣняющаяся всякой данной. Слѣдовательно, въ силу № 19 (Отдѣлъ V), заключаемъ, что въ строгомъ смыслѣ $V = S \times H$, согласно съ предл. 128.

12. На основаніи сказаннаго въ № 9 этого Отдѣла, легко доказать слѣдующую теорему:

Предл. 130. *Объёмы двухъ тетраэдровъ, имѣющихъ равнопърыя основанія и равныя высоты, равны между собою.*

Это предложеніе распространяется непосредственно на пирамиды съ какими ни есть многоугольными основаніями.

Изъ предложеній 129 и 130 очевидно слѣдуетъ, что

Объёмъ треугольной пирамиды равенъ произведенію ея основанія на треть высоты.

Дѣйствительно, если положимъ, что вмѣсто отръзка призмы, о которомъ разумѣютъ въ предл. 129, разсматриваемъ призму съ параллельными основаніями, то всѣ три пирамиды, на которыя она разлагается, будутъ имѣть одинаковую высоту; сверхъ того, такъ какъ у всѣхъ трехъ пирамидъ общее основаніе, то объёмъ каждой будетъ равенъ трети объёма призмы,

то есть основанію, умноженному на треть высоты. Наконецъ, разложивъ пирамиду съ какимъ ни есть многоугольнымъ основаніемъ на треугольныя, объёмъ ея опредѣлится по слѣдующему правилу:

Объёмъ пирамиды равенъ произведенію ея основанія на треть высоты. Предл. 131.

Основываясь на предложеніи 129 и на найденной сей-часъ мѣрѣ объёма пирамиды, заключаемъ, что объёмъ треугольной усѣченной призмы равенъ произведенію ея основанія на треть суммы перпендикуляровъ, опущенныхъ на плоскость этого основанія изъ трехъ угловъ верхняго сѣченія.

Изъ предложенія 131 прямо выводимъ, что объёмы двухъ пирамидъ 1^о при равныхъ основаніяхъ, пропорціональны ихъ высотамъ; 2^о при равныхъ высотахъ, пропорціональны основаніямъ; 3^о при какихъ ни есть основаніяхъ и высотахъ, пропорціональны произведеніямъ основаній на высоты.

Найдемъ теперь отношеніе объёмовъ двухъ подобныхъ пирамидъ. Означивъ соответственно чрезъ V , A и H объёмъ, основаніе и высоту одной изъ нихъ, а чрезъ v , a и h тѣ же принадлежности другой, получимъ

$$V = A \times \frac{H}{3}, \quad v = a \times \frac{h}{3};$$

въ силу же сказаннаго въ № 8 этого Отдѣла, имѣемъ

$$\frac{H^2}{h^2} = \frac{A}{a},$$

и слѣдовательно

$$\frac{V}{v} = \frac{A.H}{a.h} = \frac{H^3}{h^3}.$$

И такъ, объёмы двухъ подобныхъ пирамидъ относятся между собой какъ кубы ихъ высотъ.

Очевидно, что отношеніе кубовъ высотъ можетъ быть замѣнено отношеніемъ кубовъ какихъ ни есть сходственныхъ линий въ двухъ подобныхъ пирамидахъ.

Для опредѣленія объёма усѣченной пирамиды, стоитъ только изъ объёма большей пирамиды вычесть объёмъ меньшей. Пусть будутъ V , A , H объёмъ, площадь основанія и высота большей пирамиды; означимъ малыми буквами v , a , h тѣ же самыя принадлежности малой пирамиды. Имѣемъ

$$V = \frac{AH}{3} \text{ и } v = \frac{ah}{3},$$

слѣдовательно, изобразивъ чрезъ x искомый объёмъ усѣченной пирамиды, получимъ

$$x = V - v = \frac{AH - ah}{3}.$$

Съ другой же стороны

$$\frac{A}{a} = \frac{H^2}{h^2} \text{ или } A = a \cdot \frac{H^2}{h^2};$$

отсюда

$$x = \frac{1}{3} \left(a \frac{H^3}{h^2} - ah \right) = \frac{a}{3} \left(\frac{H^3 - h^3}{h^2} \right).$$

Но какъ $H^3 - h^3 = (H - h)(H^2 + Hh + h^2)$, то и найдется

$$x = \frac{H-h}{3} \left(\frac{H^2}{h^2} a + \frac{H}{h} a + a \right).$$

Наконецъ, наблюдая, что въ силу равенства $\frac{A}{a} = \frac{H^2}{h^2}$, имѣемъ

$$\frac{H^2}{h^2} a = A, \quad \frac{Ha}{h} = \sqrt{Aa},$$

получимъ формулу

$$x = \left(A + \sqrt{Aa} + a \right) \frac{H-h}{3},$$

которая выражаетъ слѣдующее предложеніе:

Объёмъ отръзка пирамиды равенъ суммѣ объёмовъ трехъ пирамидъ, имѣющихъ общую высоту съ отръзкомъ, а основаніями:

Предл. 132. 1° нижнее основаніе отръзка, 2° верхнее его основаніе, и 3° среднюю геометрическую площадь между этими двумя основаніями.

Выводъ объёма пирамиды, основанный на способѣ безконечно-малыхъ величинъ.

Вообразимъ какую ни есть треугольную пирамиду. Разсѣкаемъ её безконечнымъ множествомъ равноотстоящихъ плоскостей, параллельныхъ основанію. Такимъ образомъ получатся слои, имѣющие видъ усѣченныхъ пирамидъ, съ треугольными основаніями, подобными основанію данной. Пусть будетъ $ABCabc$ одинъ изъ этихъ слоевъ, предполагая при томъ, что площадь abc меньше площади ABC . На основаніи теоріи безконечно-малыхъ величинъ, за объёмъ этого слоя $ABCabc$ можно принять объёмъ треугольной призмы, стоящей на основаніи ABC , и имѣющей высоту, равную перпендикулярному разстоянію между двумя смежными плоскостями ABC и abc . Дѣйствительно, если, на основаніяхъ ABC и abc , построимъ двѣ призмы, и примемъ за общую ихъ высоту упомянутое сей-часъ разстояніе плоскостей, то разность объёмовъ двухъ призмъ будетъ безконечно-малая величина въ отношеніи къ каждому изъ нихъ. И такъ, означивъ площадь ABC чрезъ S , а высоту слоя чрезъ h , получимъ

$$\text{Объёмъ } ABCabc = S \times h.$$

Далѣе, означимъ чрезъ d разстояніе площади S отъ вершины пирамиды, и сверхъ того назовемъ H полную высоту ея; изобразивъ чрезъ A площадь основанія, получимъ (Пред. 123)

$$S : A = d^2 : H^2, \text{ откуда } S = \frac{A}{H^2} d^2;$$

слѣдовательно

$$\text{Объёмъ } ABCabc = \frac{A}{H^2} d^2 \times h.$$

Изобразимъ теперь чрезъ $v_1, v_2, v_3 \dots v_m$ объёмы слоевъ, соответствующихъ высотамъ $h, 2h, 3h \dots mh = H$, считая эти разстоянія отъ вершины пирамиды. Получимъ

$$v_1 = \frac{A}{H^2} \cdot h^2 \cdot h$$

$$v_2 = \frac{A}{H^2} \cdot (2h)^2 \cdot h$$

$$v_3 = \frac{A}{H^2} \cdot (3h)^2 \cdot h$$

$$\dots \dots \dots$$

$$v_m = \frac{A}{H^2} \cdot (mh)^2 \cdot h.$$

Сумма $v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_m$, которую назовемъ V , изобразитъ искомый объемъ пирамиды. И такъ, найдемъ

$$V = \frac{A}{H^2} [h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (mh)^2] \times h,$$

гдѣ mh равняется высотѣ H разсматриваемой пирамиды.

Покажемъ теперь, что найденное выраженіе для V приводитъ просто къ $A \cdot \frac{H}{3}$, сообразно съ *предл.* 131. Для этого разсмотримъ такую пирамиду, которой объемъ можетъ быть найденъ непосредственно. Возьмемъ кубъ, и изъ середины или центра его, опредѣляемого пересѣченіемъ трехъ діагональных плоскостей, проведемъ плоскости чрезъ всѣ двѣнадцать его реберъ. Такимъ образомъ получимъ *шесть* равныхъ пирамидъ, съ квадратными основаніями. Пусть будетъ H высота каждой изъ этихъ пирамидъ, $2H$ изобразитъ сторону основанія, а $4H^2$ его площадь. Такъ какъ объемъ куба равенъ $(2H)^3 = 8H^3$, то объемъ каждой изъ шести равныхъ пирамидъ будетъ $\frac{8H^3}{6} = \frac{4H^3}{3}$.

Каждую изъ нихъ разбиваемъ на двѣ равныя треугольныя пирамиды плоскостію, проходящею чрезъ общую ихъ вершину и діагональ квадратнаго основанія. Объемъ полученной такимъ образомъ треугольной пирамиды будетъ $\frac{1}{2} \cdot \frac{4H^3}{3} = \frac{2H^3}{3}$. Внесемъ эту послѣднюю величину на мѣсто V въ предѣлущее уравненіе, и замѣнимъ A площадью 2^2 , такъ что $\frac{A}{H^2} = 2$. Предполагая, что h не измѣнилось, и не теряя изъ виду, что полная высота $mh = H$ одинакова для обѣихъ пирамидъ, получимъ

$$\frac{2H^3}{3} = 2 [h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (mh)^2] \times h.$$

И такъ

$$[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (mh)^2] \times h = \frac{H^3}{3}.$$

Внеся эту величину въ общее выраженіе для V , получимъ окончательно

$$V = A \times \frac{H}{3},$$

что и слѣдовало доказать.

Если бы желали съ болѣею строгостію доказать справедливости замѣненія объема слоя $ABCabc$ произведеніемъ $S \times h$, то разсуждали бы слѣдующимъ образомъ: опустивъ, какъ слѣдуетъ для

призмы, перпендикуляры am , bn , cq на плоскость ABC , и соединивъ потомъ эти точки прямыми линіями, получимъ два пересѣкающіеся треугольника ABC и mnp . Должно замѣтить, что по крайней мѣрѣ одна изъ трехъ точекъ m , n , q будетъ находиться внутри треугольника ABC , потому что треугольникъ mnp меньше треугольника ABC , и, сверхъ того, разстоянія Am , Bn , Cq неизмѣримо-малы. Означимъ площадь ABC чрезъ S , а высоту слоя чрезъ h ; далѣе, пусть будетъ s неизмѣримо-малая площадь $BnpC$, а s' избытокъ площади треугольника ABC предъ площадью треугольника mnp . Построимъ теперь двѣ прямыя призмы съ общою высотой h , одну, имѣющую основаніемъ пятиугольникъ $ABnpC$, а другую, на основаніи mnp . Объемы этихъ двухъ призмъ будутъ соответственно (*Предл.* 128)

$$(S + s) \times h = S \times h + s \times h$$

$$(S - s') \times h = S \times h - s' \times h.$$

Очевидно, что объемъ разсматриваемаго слоя $ABCabc$ заключается между двумя найденными, такъ что

$$ABCabc < S \times h + s \times h$$

$$ABCabc > S \times h - s' \times h.$$

Замѣтимъ теперь, что отношенія

$$\frac{s \times h}{S \times h} = \frac{s}{S} \quad \text{и} \quad \frac{s' \times h}{S \times h} = \frac{s'}{S}$$

суть количества безконечно-малыя, почему, въ слѣдствіе сказаннаго въ *Леммѣ* 19 (*Отдѣлъ V*), члены $s \times h$ и $s' \times h$ должны быть откинуты; и такъ, объемъ $ABCabc$ выразится просто произведеніемъ $S \times h$ при h неизмѣримо-маломъ.

13. Объемъ какого ни есть многогранника получится разложивъ его предварительно на пирамиды, или плоскостями проведенными чрезъ вершину произвольнаго многограннаго угла, или принявъ за вершину какую ни есть внутреннюю точку въ многоугольникѣ.

За симъ Предподаватель докажетъ слѣдующее предложеніе:

Объемы подобныхъ многогранниковъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ ихъ линій.

Предл. 133.

Правильными многогранниками называются такіе, которые ограничены равными правильными многоугольниками, и имѣютъ равные многогранные углы.

Основываясь на *предложеніи 116* легко доказать, что правильныхъ многогранниковъ, съ *исходящими углами*, не можетъ быть болѣе пяти, а именно: три многогранника, имѣющіе гранями равносторонніе треугольники, одинъ — квадраты, и еще одинъ — правильные пятиугольники.

Посредствомъ строгихъ соображеній, на которыхъ Преподавателю нѣтъ надобности останавливаться, доказываютъ, что дѣйствительно существуетъ пять правильныхъ многогранниковъ, которымъ, по числу граней, присвоены особые названія, а именно:

Правильный тетраэдръ или *правильный четырехгранникъ*, ограниченный четырьмя равными равносторонними треугольниками.

Экзаэдръ или *кубъ*, ограниченный шестью равными квадратами.

Октаэдръ или *правильный восьмигранникъ*, ограниченный восьмью равными равносторонними треугольниками.

Додекаэдръ или *правильный двѣнадцатигранникъ*, ограниченный двѣнадцатью равными правильными пятиугольниками.

Икосаэдръ или *правильный двадцатигранникъ*, ограниченный двадцатью равными равносторонними треугольниками.

Преподаватель упомянетъ только о *звѣздообразныхъ правильныхъ многогранникахъ* (*polyèdres étoilés*) съ углами выходящими *).

Для упражненія и повторенія пройденнаго въ этомъ Отдѣлѣ надобно непремѣнно предлагать воспитанникамъ примѣры измѣренія объемовъ правильныхъ и неправильныхъ многогранниковъ.

(*) Г. Поэнсо первый открылъ и описалъ въ своемъ: *Mémoire sur les polyèdres et les polyèdres*, четыре новые правильные многогранника, съ выходящими многогранными углами. Г. Коши, въ 16-й тетради Журнала Политехнической Школы, за 1813 годъ, доказалъ, что болѣе четырехъ новыхъ правильныхъ многогранниковъ, найденныхъ Г. Поэнсо, существовать не можетъ.

О Т Д Ъ Л Ъ XI.

О КРУГЛЫХЪ ТѢЛАХЪ.

14. Всякая плоская фигура, обращающаяся около неподвижной прямой линіи, взятой въ ея плоскости, производитъ тѣло, называемое *тѣломъ вращенія*.

Въ Начальной Геометріи разсматриваются только три рода такихъ тѣлъ, которыя называютъ *круглыми тѣлами*, именно: *прямой цилиндръ*, *прямой конусъ* и *шаръ*.

Прямой цилиндръ есть тѣло, образуемое обращеніемъ прямоугольника около одной изъ его сторонъ, принимаемой за неподвижную. Далѣе, слѣдуетъ условиться въ названіяхъ: *ось*, *производящая* или *ребро*, *основанія*, *выпуклая* или *боковая поверхность* и *объемъ* цилиндра.

Прямой конусъ есть тѣло, образуемое обращеніемъ прямоугольнаго треугольника около одного изъ его катетовъ, принимаемаго за неподвижный. — *Вершина*, *ось*, *высота*, *производящая* или *ребро*, *основаніе*, *выпуклая* или *боковая поверхность* и *объемъ* конуса.

Шаръ есть тѣло, образуемое обращеніемъ полукруга около ея діаметра, принимаемаго за неподвижный. — *Центръ*, *радіусъ*, *діаметръ*, *поверхность*, *объемъ* шара. Преподаватель объяснить также названія: *сферическій треугольникъ*, *стороны* и *углы* его, *полюсъ*, *полюсъ*, *шаровой сегментъ* и *шаровой секторъ*.

Послѣ этихъ опредѣленій надлежитъ доказать по порядку слѣдующія предложенія:

Сыченіе прямого цилиндра плоскостію перпендикулярною къ его оси, есть кругъ, равный каждому изъ основаній, а Предл. 13

плоскостію перпендикулярною къ основаніямъ, прямоуголь-
никъ.

Предл. 133. Сѣченіе прямого конуса плоскостію перпендикулярною къ
его оси, есть кругъ, а плоскостію проходящею чрезъ его ось,
треугольникъ.

Здѣсь можно замѣтить, что при данномъ положеніи сѣкущей
плоскости, получатся кривыя линіи, называемыя *коническими*
сѣченіями, свойства которыхъ изслѣдованы знаменитымъ Гре-
ческимъ Геометромъ *Аполлоніемъ*, жившимъ за 200 лѣтъ до
Р. Х. Изъ древнихъ Геометровъ, первое мѣсто, послѣ *Архи-*
меда, безспорно принадлежитъ упоминаемому *Аполлонію*.

Предл. 136. Сѣченіе шара плоскостію есть кругъ.

Когда сѣкущая плоскость проходитъ чрезъ центръ шара, то
сѣченіе называется *большимъ кругомъ*, а когда не проходитъ
чрезъ него, — *малымъ кругомъ*.

Касательная плоскость къ шару есть плоскость, имѣющая
только одну точку общую съ его поверхностію. Легко видѣть,
что всякая плоскость, проходящая чрезъ конецъ радіуса шара,
и перпендикулярная къ этому радіусу, удовлетворяетъ условію
касанія. Дѣйствительно, какую бы точку не взяли на этой плос-
кости, если только она не точка касанія, то разстояніе ея отъ
центра шара будетъ *больше* его радіуса, въ отношеніи къ кото-
рому оно наклонно.

Предл. 137. *Кратчайшее разстояніе между двумя точками, взятыми*
на шаровой поверхности, измѣряется дугою большого круга,
заключающеюся между данными двумя точками.

Это предложеніе, необходимое въ послѣдствіи для *Матема-*
тической Географіи, можно доказать очень просто, безъ пособія
свойствъ сферическаго треугольника на слѣдующемъ основаніи:

Фиг. 37. Пусть будутъ *A* и *B* двѣ точки, данныя на поверхности
шара; проводимъ чрезъ нихъ и чрезъ центръ *C* плоскость,
которая разсѣчетъ шаръ по дугѣ *AMB* большого круга. Надоб-

но доказать, что эта дуга *AMB* изобразитъ *кратчайшее раз-*
стояніе двухъ точекъ *A* и *B* на сферической поверхности.

Вообразимъ, противно сказанному, что кратчайшая линія меж-
ду *A* и *B* не есть дуга *AMB* большого круга, а какая ни
есть линія *AabcdB*. Разложимъ эту линію на безконечное мно-
жество неизмѣримо-малыхъ прямыхъ, составляющихъ, поло-
жимъ, ломаную линію *AabcdsgB*; каждая ея точка, находясь Фиг. 38.
на поверхности шара, будетъ равно удалена отъ его центра *C*.
Соединимъ всѣ точки *A, a, b, c, ..., до B* съ центромъ, и чрезъ
каждую двѣ смежныя линіи *AC* и *aC*, *aC* и *bC*, *bC* и *cC* и такъ
дальше до *gC* и *BC*, проведемъ плоскости, ограниченныя этими
самыми линіями; проведемъ также плоскость чрезъ прямыя
AC и *BC*. Такимъ образомъ получимъ многогранный уголъ въ
центрѣ шара *C*. Теперь, на основаніи предл. 115, сумма
всѣхъ линейныхъ угловъ *ACa*, *aCb*, *bCc* до *gCB* будетъ
болѣе угла *ACB*. Слѣдовательно, если развернемъ въ плоскость
часть *AabcdsgBC* многограннаго угла, то, по причинѣ равен-
ства линій *AC*, *aC*, *bC*, *cC*, *gC*, *BC*, изображающихъ радіу-
сы одного и того же шара, получимъ плоскую фигуру *A'a'b'* Фиг. 39.
c'd'e'f'g'B'C', въ которой уголъ *A'C'B'* будетъ болѣе угла *ACB*.
Но такъ какъ прямыя *A'a'*, *a'b'*, *b'c'* *g'B'* означаютъ величины
неизмѣримо-малыя, то совокупность ихъ, изображающую по пред-
положенію кратчайшее разстояніе между точками *A* и *B* на
шарѣ, можно будетъ замѣнить дугою *A'a'b'.....g'B'*, описан-
ною радіусомъ шара изъ центра *C'*. Съ другой же стороны,
такъ какъ уголъ *A'C'B'* болѣе угла *ACB*, то и заключаемъ,
что *A'a'b'.....g'B'* болѣе дуги *AMB*, которая, поэтому, изо-
бразитъ кратчайшее разстояніе между двумя точками *A* и *B*
на шаровой поверхности.

15. Основываясь на замѣчаніи, что кругъ можетъ быть
замѣненъ правильнымъ многоугольникомъ, имѣющимъ неизмѣ-
римо-малыя стороны, заключаемъ, что можно принять цилиндръ

за призму, конусъ за пирамиду, наконецъ, усѣченный конусъ за стрѣзокъ пирамиды. Поэтому, найденныя въ предыдущемъ Отдѣлѣ X выраженія для поверхностей и объёмовъ призмъ и пирамидъ будутъ приличествовать цилиндрамъ и конусамъ, когда, въ этихъ выраженіяхъ, замѣнимъ периметръ и площадь основанія, окружностію и площадью круга, а ребро призмы и пирамиды, — производящею цилиндра и конуса. Такимъ образомъ выведемъ непосредственно слѣдующія предложенія, относящіяся къ прямымъ цилиндрамъ и конусамъ съ круговыми основаніями:

Предл. 138. Боковая поверхность прямого цилиндра съ круговымъ основаніемъ равна окружности основанія, помноженной на производящую или на высоту его.

Предл. 139. Объёмъ того же цилиндра равенъ площади основанія, помноженной на высоту.

Предл. 140. Боковая поверхность прямого конуса съ круговымъ основаніемъ равна произведенію окружности основанія на половину производящей.

Предл. 141. Объёмъ того же конуса равенъ площади основанія, помноженной на треть высоты.

На основаніи этихъ предложеній выводимъ слѣдующія заключенія:

Боковыя поверхности двухъ прямыхъ цилиндровъ относятся между собой какъ произведенія радиусовъ ихъ основаній на высоты.

Объёмы тѣхъ же цилиндровъ относятся между собой какъ произведенія квадратовъ радиусовъ ихъ основаній на высоты.

Боковыя поверхности двухъ прямыхъ конусовъ относятся между собой какъ произведенія радиусовъ ихъ основаній на производящія.

Объёмы тѣхъ же конусовъ относятся между собой какъ произведенія квадратовъ радиусовъ ихъ основаній на высоты.

Боковая поверхность усѣченного прямого конуса равна полусуммѣ окружностей двухъ основаній, помноженной на производящую или на наклонный бокъ. Предл. 142.

Для доказательства послѣдняго предложенія, пусть будутъ R и r радиусы нижняго и верхняго основанія усѣченного конуса. Означимъ чрезъ s производящую малаго усѣченного конуса, а чрезъ S производящую полнаго большаго конуса; $S-s$ изобразить наклонный бокъ разсматриваемаго усѣченного конуса. Пусть будетъ сверхъ того E боковая поверхность большаго, а e боковая поверхность малаго конуса; искомая боковая поверхность опредѣлится разностию $E-e$. Но, въ силу предл. 140, будетъ

$$E = \pi RS, \quad e = \pi rs;$$

слѣдовательно

$$E - e = \pi(RS - rs);$$

съ другой же стороны имѣемъ

$$R : r = S : s,$$

откуда

$$s = \frac{rS}{R}.$$

И такъ

$$E - e = \pi \left(RS - \frac{r^2 S}{R} \right) = \pi S \cdot \frac{R^2 - r^2}{R},$$

или

$$E - e = \pi(R+r) \cdot \frac{(R-r)S}{R}.$$

Изъ подобія же треугольниковъ, получаемыхъ при пересѣченіи большаго конуса плоскостію проходящею чрезъ его ось, находимъ

$$R - r : S - s = R : S,$$

откуда

$$\frac{(R-r)S}{R} = S - s.$$

Слѣдовательно

$$E - e = \pi(R+r)(S-s),$$

согласно съ предл. 142.

Объем прямого усеченного конуса равен суммъ объемовъ трехъ полныхъ конусовъ, имѣющихъ одну высоту съ усеченнымъ, а основаниями: 1° нижнее основаніе данного; 2° верхнее его основаніе; 3° среднюю геометрическую площадь между верхнимъ и нижнимъ основаниями.

Доказательство этого предложенія ничѣмъ не отличается отъ доказательства предл. 132.

16. Поверхность шара равняется учетверенной площади большаго его круга, или, что всё равно, произведенію окружности большаго круга на его діаметръ.

Это предложеніе очень легко доказать основываясь на теоріи бесконечно-малыхъ величинъ слѣдующимъ образомъ: пусть будетъ AMB полуокружность большаго круга, AB его діаметръ, а MN неизмѣримо-малая дуга, сливающаяся съ хордою. Опустимъ изъ точекъ M и N на діаметръ AB перпендикуляры Mm и Nn , и означимъ чрезъ R радіусъ CM шара, а чрезъ h перпендикуляръ MP , опущенный на прямую Nn ; такъ какъ линія h менѣе хорды MN , то сама будетъ неизмѣримо-малою величиною. Сверхъ того, назовемъ k бесконечно-малую линію NP . Полуокружность AMB , совершивъ полное обращеніе около діаметра AB , произведетъ шаровую поверхность, а неизмѣримо-малая дуга или хорда MN , опишетъ поверхность усеченнаго конуса, которая, въ силу предл. 142, будетъ равна

$$\pi(\overline{Mm} + \overline{Nn}) \times \overline{MN} = \pi(2\overline{Mm} + k) \times \overline{MN}.$$

Но, изъ подобія треугольниковъ Mcm , MNP , получимъ

$$\overline{Mm} : \overline{MC} = \overline{MP} : \overline{MN},$$

откуда, по причинѣ $\overline{MC} = R$ и $\overline{MP} = h$,

$$\overline{MN} = \frac{R \times h}{\overline{Mm}};$$

И такъ, поверхность усеченнаго конуса, образуемаго вращеніемъ бесконечно-малой дуги MN , будетъ

$$\pi(2\overline{Mm} + k) \frac{R \times h}{\overline{Mm}} = 2\pi R h + \frac{\pi R k h}{\overline{Mm}}.$$

Но такъ какъ бесконечно-малая величина k , на основаніи сказаннаго въ № 19 (Отдѣлъ V), должна быть откинута предъ конечною величиною $2\overline{Mm}$, то членъ $\frac{\pi R k h}{\overline{Mm}}$ пропадетъ, и для мѣры боковой поверхности конуса останется выраженіе $2\pi R h$, гдѣ h означаетъ высоту отръзка. Слѣдовательно, если разложимъ весь діаметръ AB на безчисленное множество частицъ равныхъ h , то каждая поверхность усеченнаго конуса, соотвѣтствующая подобной частицѣ, изобразится чрезъ $2\pi R h$, а сумма ихъ будетъ очевидно равна $2\pi R \times AB = 2\pi R \times 2R = 4\pi R^2$. Съ другой же стороны, такъ какъ πR^2 означаетъ площадь круга, описаннаго радіусомъ R , то и получимъ для поверхности шара учетверенную площадь большаго круга.

Предложенное доказательство равно приличествуетъ поверхностямъ шароваго сегмента и пояса, такъ что

Поверхность шароваго сегмента, а также пояса, равна окружности большаго круга, умноженной на высоту разсматриваемаго сегмента или пояса.

17. Объемъ шара равенъ поверхности его, умноженной на третью радіуса.

Для доказательства этого предложенія, Преподаватель замѣтитъ, что поверхность шара можетъ быть замѣнена многогранною поверхностію, состоящею изъ бесконечнаго множества неизмѣримо-малыхъ граней, подобно тому, какъ окружность замѣняется многоугольникомъ о бесконечномъ множествѣ неизмѣримо-малыхъ сторонъ. На такомъ основаніи, объемъ шара можно принимать за объемъ многогранника, съ безчисленнымъ множествомъ граней. Проведя чрезъ ребры послѣдняго и чрезъ центръ шара плоскости, мы разобъемъ разсматриваемый многогранникъ на безчисленное множество пирамидъ, имѣющихъ

общую высоту радиусъ шара, а основаниями, грани многогранника. Такъ какъ объёмъ всякой пирамиды равенъ площади основанія, умноженной на треть высоты, то объёмъ всѣхъ или нѣсколькихъ такихъ пирамидъ, равенъ суммѣ соответственныхъ оснований, умноженной на треть радиуса. Отсюда непосредственно выводимъ *предлож. 146*, и, сверхъ того, заключаемъ, что *объёмъ шароваго сектора равенъ поверхности соответствующаго сегмента, умноженной на треть радиуса.*

Прелл. 147.

Чтобы получить объёмъ шароваго сегмента, стоитъ только изъ объёма сектора вычесть объёмъ конуса, имѣющаго основаніемъ самое основаніе сегмента, а высотой, разность между радиусомъ шара и высотой сегмента. Объёмъ шароваго пояса получится очевидно взявъ разность объёмовъ двухъ шаровыхъ сегментовъ.

Означивъ чрезъ R радиусъ шара, чрезъ h высоту сегмента, а чрезъ V его объёмъ, и наблюдая, что радиусъ круга, служащаго основаніемъ сегменту, будетъ среднею пропорціальною линіею между двумя отрезками h и $2R - h$ діаметра (Отдѣлъ VI, № 22), получимъ, основываясь на *предложеніяхъ 145 и 141*:

$$V = 2\pi R h \cdot \frac{R}{3} - \pi h (2R - h) \cdot \frac{R - h}{3},$$

или, по сокращеніи,

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right).$$

И такъ

Прелл. 148.

Объёмъ шароваго сегмента равнопреизъ съ объёмомъ цилиндра, котораго основаніе есть кругъ, описанный радиусомъ, равнымъ высотѣ самаго сегмента, а высота, радиусъ шара безъ одной трети высоты сегмента.

Прелл. 149.

Объёмъ сегмента о двухъ основаніяхъ имѣетъ мѣрою произведение полу-суммы площадей двухъ основаній на высоту, сложенное съ объёмомъ шара, описаннаго радиусомъ, равнымъ половине этой самой высоты.

Удержимъ означенія, которыя сей-часъ употребили, и назовемъ сверхъ того буквою h' высоту другаго сегмента объ одномъ основаніи. Пусть будетъ $h' > h$ и $h' - h = H$ высота раз-

сматриваемаго пояса, котораго объёмъ означимъ чрезъ v . Такъ какъ этотъ объёмъ очевидно равенъ разности двухъ сегментовъ, то получимъ

$$v = \pi h'^2 \left(R - \frac{1}{3}h'\right) - \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right),$$

или

$$v = \pi (h' - h) \left[R (h' + h) - \frac{h'^2 + h'h + h^2}{3} \right].$$

Но радиусъ r' большаго основанія пояса есть средняя пропорціоная между h' и $2R - h'$, а радиусъ r меньшаго основанія, между h и $2R - h$; слѣдовательно

$$r'^2 = (2R - h') h' = 2Rh' - h'^2$$

$$r^2 = (2R - h) h = 2Rh - h^2.$$

Означивъ же площади этихъ двухъ основаній соответственно чрезъ A и a , найдемъ

$$A = \pi r'^2 = \pi (2Rh' - h'^2)$$

$$a = \pi r^2 = \pi (2Rh - h^2),$$

и поэтому, сложивъ послѣднія два уравненія и раздѣливъ на 2,

$$\pi \left[R(h' + h) - \frac{h'^2 + h^2}{2} \right] = \frac{A + a}{2},$$

или

$$\pi R (h' + h) = \frac{A + a}{2} + \pi \cdot \frac{h'^2 + h^2}{2}.$$

Но найденное выше выраженіе для v , по замѣненіи въ немъ разности $h' - h$ высотой пояса H , доставляетъ

$$v = \pi H R (h' + h) - \pi \cdot \frac{h'^2 + h'h + h^2}{3} \cdot H.$$

Слѣдовательно

$$v = \frac{A + a}{2} \cdot H + \pi \cdot \frac{h'^2 + h^2}{2} \cdot H - \pi \cdot \frac{h'^2 + h'h + h^2}{3} \cdot H.$$

Съ другой стороны, разность

$$\begin{aligned} & \pi \cdot \frac{h'^2 + h^2}{2} \cdot H - \pi \cdot \frac{h'^2 + h'h + h^2}{3} \cdot H \\ &= \pi H \left(\frac{h'^2 - 2h'h + h^2}{6} \right) = \pi H \cdot \frac{(h' - h)^2}{6} = \frac{\pi H^3}{6}, \end{aligned}$$

почему

$$v = \frac{A + a}{2} \cdot H + \frac{4\pi \left(\frac{1}{2}H\right)^3}{3},$$

сообразно съ *предлож. 149*.

18. Прямые цилиндры и прямые конусы называются подобными, когда сходственные их линии, например радиусы оснований и высоты, соответственно пропорциональны.

Пусть будут R, H, S, E и V радиус основания цилиндра или конуса, высота, производящая, боковая поверхность и объём, а r, h, s, e и v тѣ же величины въ разсужденіи другаго цилиндра или конуса. Для цилиндровъ получимъ

$$E = \pi RS \text{ и } e = \pi rs,$$

откуда

$$\frac{E}{e} = \frac{RS}{rs};$$

съ другой же стороны, по причинѣ пропорціональности сходственныхъ линий,

$$\frac{S}{s} = \frac{R}{r},$$

почему и будетъ

$$\frac{E}{e} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{S^2}{s^2}.$$

Точно такой же результатъ получится для подобныхъ конусовъ, такъ что

Предл. 150. Боковыя поверхности подобныхъ цилиндровъ и конусовъ пропорціональны квадратамъ сходственныхъ ихъ линий.

Для объёмовъ двухъ цилиндровъ имѣемъ

$$V = \pi R^2 H \text{ и } v = \pi r^2 h,$$

откуда

$$\frac{V}{v} = \frac{R^2 H}{r^2 h},$$

но

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{r},$$

слѣдовательно

$$\frac{V}{v} = \frac{R^3}{r^3} = \frac{H^3}{h^3}.$$

То же самое получится для подобныхъ конусовъ. И такъ
Объёмы подобныхъ цилиндровъ и конусовъ пропорціональны кубамъ сходственныхъ ихъ линий. **Предл. 151.**

Пусть R, E и V означаютъ радиусъ, поверхность и объёмъ шара, а r, e и v тѣ же величины для другаго. Будетъ

$$E = 4\pi R^2 \text{ и } e = 4\pi r^2;$$

слѣдовательно

$$\frac{E}{e} = \frac{R^2}{r^2}.$$

Для сравненія объёмовъ двухъ шаровъ имѣемъ

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \text{ и } v = \frac{4\pi r^3}{3},$$

откуда

$$\frac{V}{v} = \frac{R^3}{r^3}.$$

И такъ, предложенія 150 и 151 справедливы и для шаровъ.

Послѣднія два предложенія 150 и 151, и подобныя имъ въ разсужденіи многогранниковъ, объясняютъ какъ нельзя лучше смыслъ, въ которомъ говорятъ, что поверхность имѣетъ два измѣренія, а объёмъ, три. Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ два подобныя тѣла, положимъ изъ числа тѣхъ, которыя мы изслѣдовали. Означимъ чрезъ S какую нибудь опредѣленную линию, разсматриваемую въ одномъ изъ этихъ двухъ тѣлъ, чрезъ E его поверхность, а чрезъ V объёмъ. Если изобразимъ буквами s, e, v тѣ же величины относительно втораго тѣла, то получимъ два уравненія

$$\frac{E}{e} = \frac{S^2}{s^2} \text{ и } \frac{V}{v} = \frac{S^3}{s^3},$$

или

$$E = \frac{e}{s^2} \times S^2 \text{ и } V = \frac{v}{s^3} \times S^3.$$

Вообразимъ теперь, что второе тѣло принято за сравнительную единицу, такъ что поверхность его e принимается за еди-

ницу площади, объём v за единицу объёма, наконецъ линія s за единицу длины. Тогда послѣднія уравненія приведуть къ слѣдующимъ выраженіямъ поверхности и объёма:

$$E = S^2 \text{ и } V = S^3,$$

такъ что поверхность изобразится произведениемъ двухъ линій, которыя и будутъ ея двумя измѣреніями, а объёмъ, произведениемъ трехъ линій, означающихъ три ея измѣренія. Хотя подъ S мы и разумѣемъ линію, но, собственно говоря, S означаетъ отношеніе S къ линейной длинѣ s , и поэтому будетъ числомъ отвлеченнымъ. Слѣдовательно и степени S^2 и S^3 изображать числа отвлеченныя; такъ S^2 будетъ означать сколько въ поверхности E заключается единичныхъ площадей s^2 (квадратовъ, построенныхъ на сторонѣ $s=1$), а S^3 , сколько находится въ V единичныхъ объёмовъ s^3 (кубовъ, имѣющихъ ребромъ $s=1$).

19. На основаніи сказаннаго о мѣрѣ поверхностей и объёмовъ цилиндра, конуса и шара, можно непосредственно вывести слѣдующія предложенія:

Боковая поверхность прямого цилиндра, описаннаго около шара, равна поверхности самого шара. Объёмъ разсматриваемого цилиндра равенъ полтора раза взятому объёму шара.

Прелл. 152.

Если къ боковой поверхности цилиндра придадимъ площади двухъ его оснований, то получимъ для суммы, какъ и при сравненіи объёмовъ, полтора раза взятую поверхность шара.

Эти примѣчательныя отношенія открыты *Архимедомъ*.

Положимъ еще, что около шара описанъ прямой конусъ, котораго производящая равна діаметру основанія самого конуса. Если означимъ чрезъ R радіусъ шара, то легко видѣть, что радіусъ основанія конуса изобразится чрезъ $R\sqrt{3}$, а поэтому производящая его будетъ равна $2R\sqrt{3}$. Слѣдовательно

$$\frac{\text{боковая поверхность конуса}}{\text{поверхности шара}} = \frac{2\pi \cdot R\sqrt{3} \cdot 2R\sqrt{3}}{4\pi R^2} = \frac{3}{2}.$$

Наконецъ замѣтивъ, что высота конуса есть $3R$, найдемъ

$$\frac{\text{объёмъ конуса}}{\text{объёму шара}} = \frac{3\pi R^2 \cdot \frac{3R}{3}}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{9}{4}.$$

Въ заключеніе курса, Преподаватель сдѣлаетъ краткій перечень всего пройденнаго изъ Геометріи, и, если позволитъ время, займетъ воспитанниковъ рѣшеніемъ нѣкоторыхъ практическихъ задачъ, относящихся къ измѣренію поверхностей и объёмовъ тѣлъ. Этими упражненіями окончится курсъ Начальной Геометріи въ объёмъ, достаточномъ въ отношеніи умозрительной стороны науки, а равно и практической ея цѣли. Дѣйствительно, по Конспекту, въ теоретической части не пропущено ничего существеннаго, при чёмъ въ порядкѣ предметовъ соблюдена по возможности послѣдовательность, оправдываемая тою системою изложенія, которая была подробно разобрана въ Общихъ замѣчаніяхъ. Съ другой стороны, при составленіи Программы и Конспекта Геометріи, постоянно имѣли въ виду практическую цѣль ея въ отношеніи къ потребностямъ воспитанниковъ Военно-Учебныхъ Заведеній. Согласно съ такимъ воззрѣніемъ, приложено было возможное стараніе, чтобъ въ составъ Геометріи вошли всѣ тѣ предложенія, которыя имѣютъ непосредственное приложеніе въ Аналитической Геометріи, въ Фортификаціи, Артиллеріи, Топографіи, Математической Географіи, Физикѣ и Механикѣ. Рѣшать же въ самомъ Курсѣ Геометріи вопросы, относящіеся къ этимъ наукамъ, признано неудобнымъ, во первыхъ, по недостатку времени, а во вторыхъ, потому что технические термины, употребляемые въ этихъ предметахъ, болѣею частію еще не знакомы учащимся. Самое же изложеніе Геометріи должно

быть таково, чтобы въ послѣдствіи рѣшеніе упоминаемыхъ задачъ не представляло никакихъ затрудненій для воспитанниковъ; при совѣстливомъ исполненіи Программы по указаніямъ Конспекта, эта цѣль будетъ достигнута.

Предсѣдатель: Главный Наблюдатель Остроградскій.

Члены: Дѣйств. Статскій Сов. Кушакевичъ.

Полковникъ Павловскій.

Профессоръ Савичъ.

Капитанъ Собко 1.

Членъ и Редакторъ: Академикъ Буняковскій.

